

Instrumentos Inerciales

Miden respecto de un sistema inercial:

A) Acelerómetros: aceleración [m/seg^2], [g].

B) Giróscopos: velocidad angular [$^\circ/\text{seg}$].

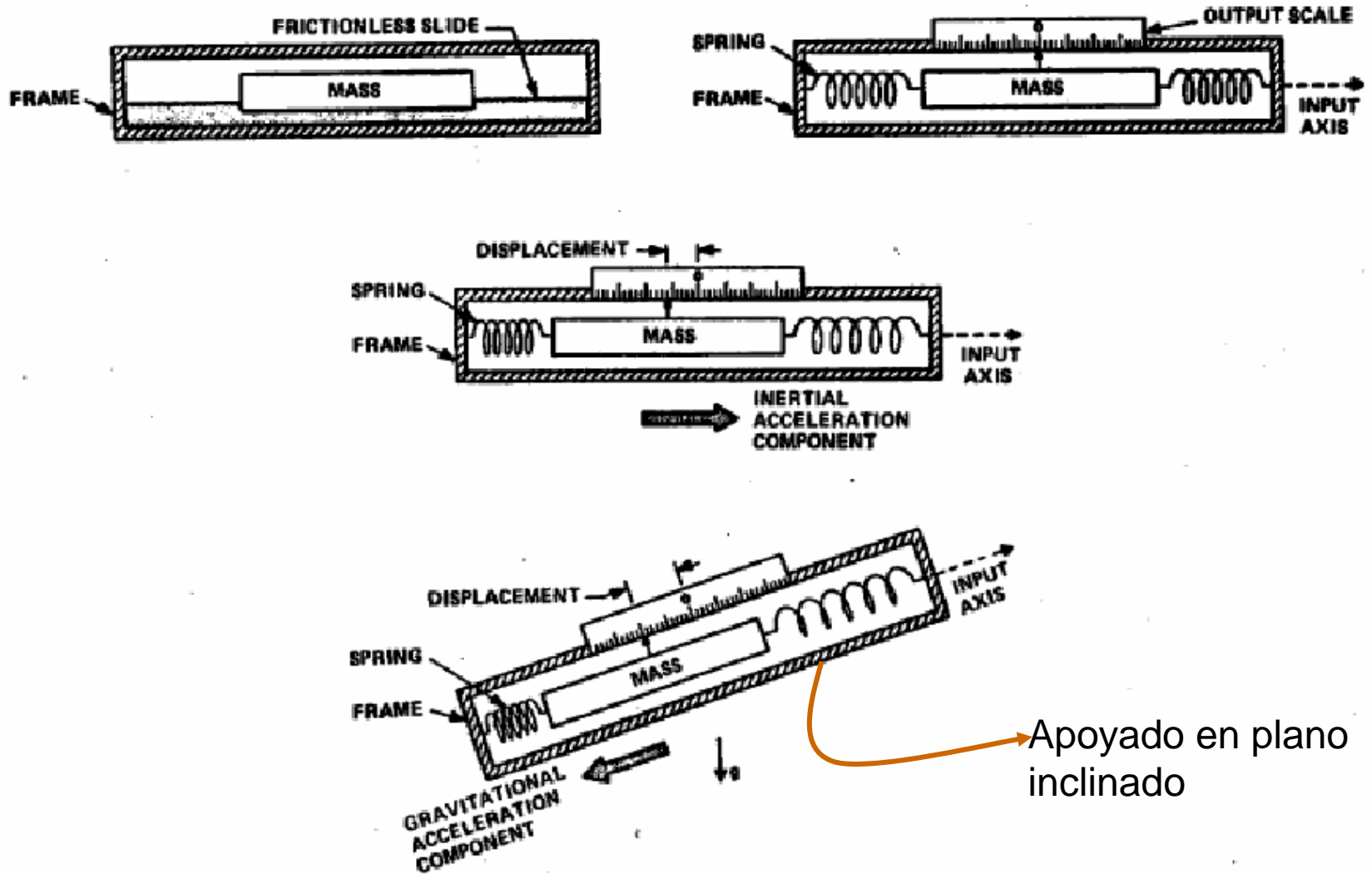
Referencias:

Titterton, D. H. And J. L. Weston, **Strapdown Inertial Navigation Technology**, P. Peregrinus Ltd. Stevenage, UK, 1997.

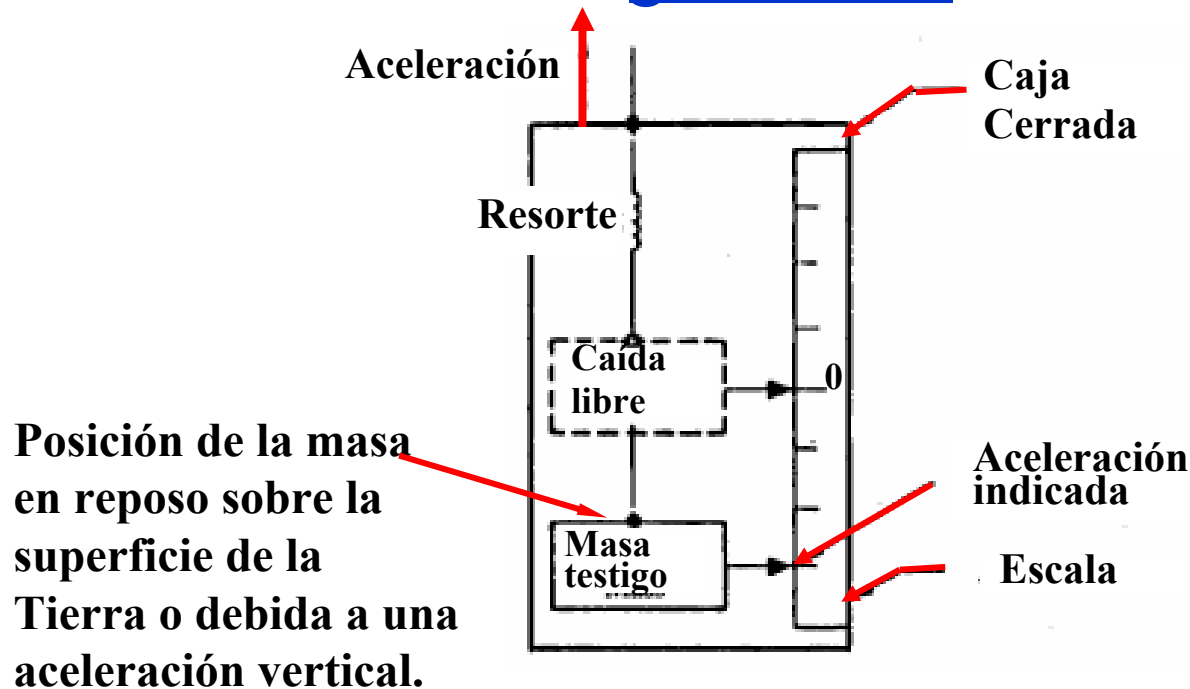
Navid Yazdi, Farrokh Ayazi & Khalil Najafi, *Micromachine Inertial Sensors*; **Proceedings of the IEEE**, Vol. 86, N°8, 1998.

IEEE stnd. 952-1997

Todos los acelerómetros miden desplazamientos de una “masa testigo”



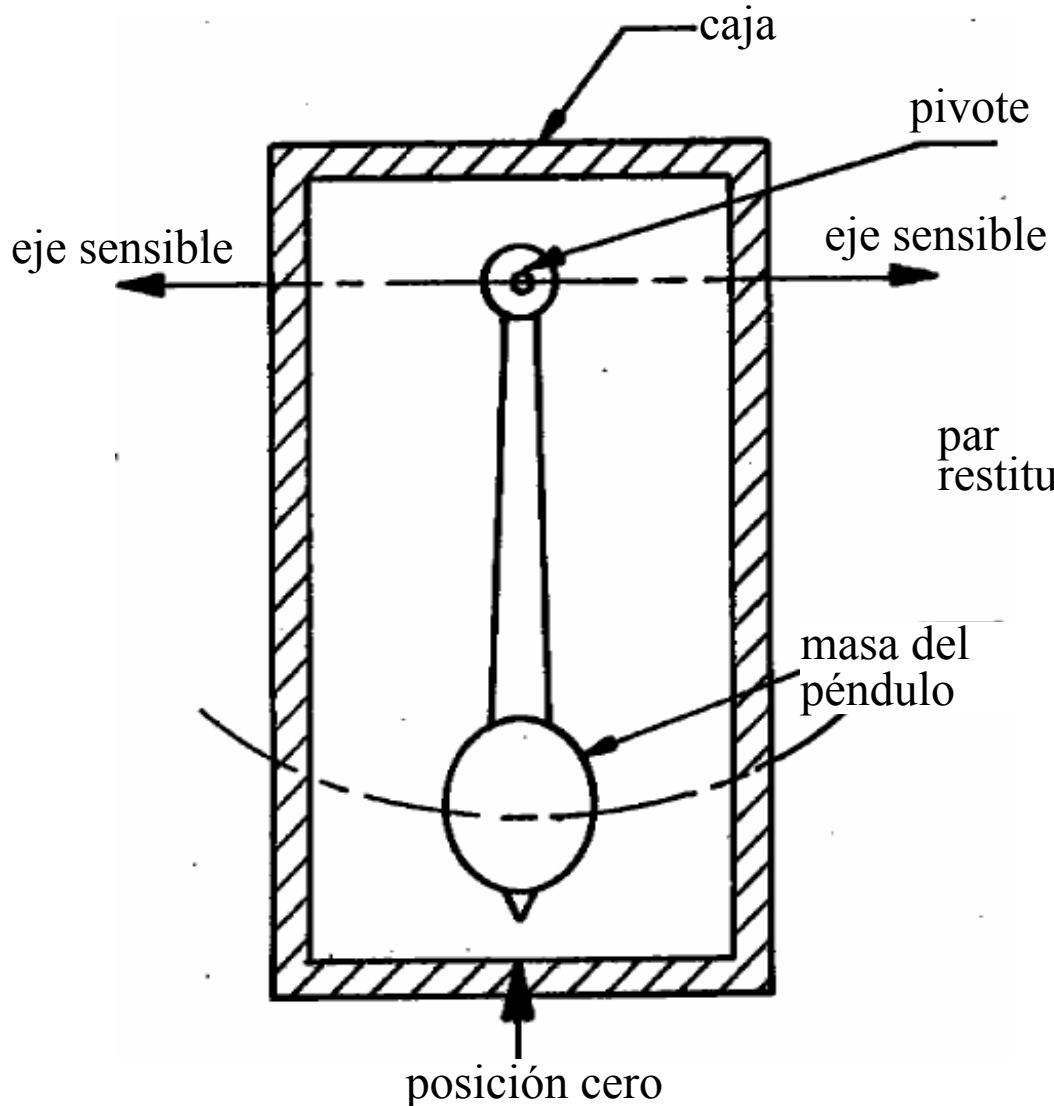
Un acelerómetro no mide la aceleración de la gravedad!!



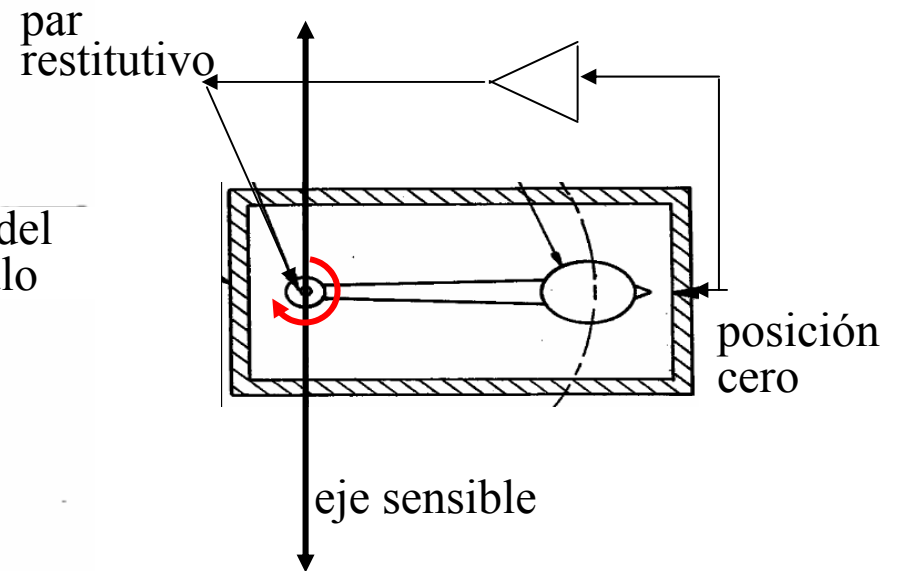
$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$$

\mathbf{f} = fuerza específica: medición del acelerómetro
 \mathbf{g} = aceleración de la gravedad (atracción newtoniana)
 \mathbf{R} = vector posición en coordenadas inerciales.

Acelerómetro como instrumento de cero

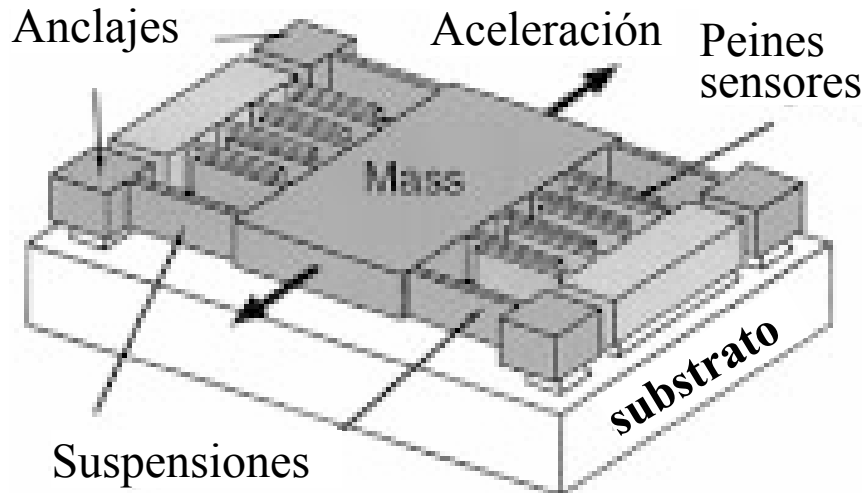
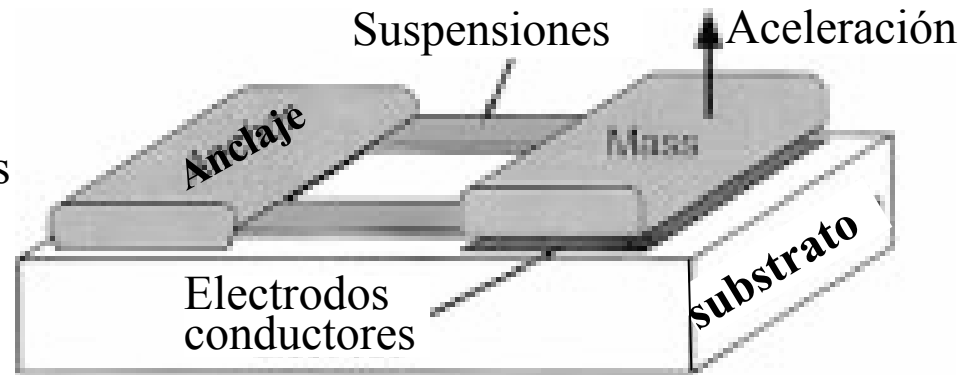
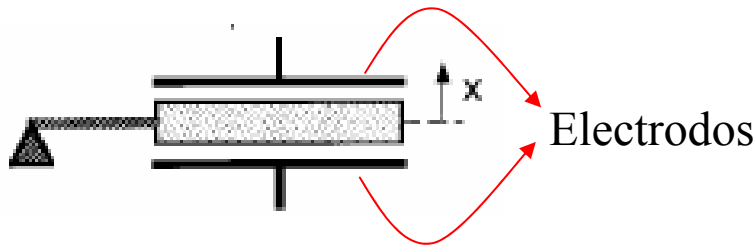


- Mayor sensibilidad
- Sensibilidad uniforme
- Mayor rango dinámico.



Acclerómetros de estado sólido (MEMS)

Capacitivos: miden capacidad y restituyen el cero con fuerzas eléctricas o magnéticas.



Otras tecnologías:

- Piezoresistivos.
- De corriente de tunel.
- Vibratorios.
- Ópticos

Giróscopos

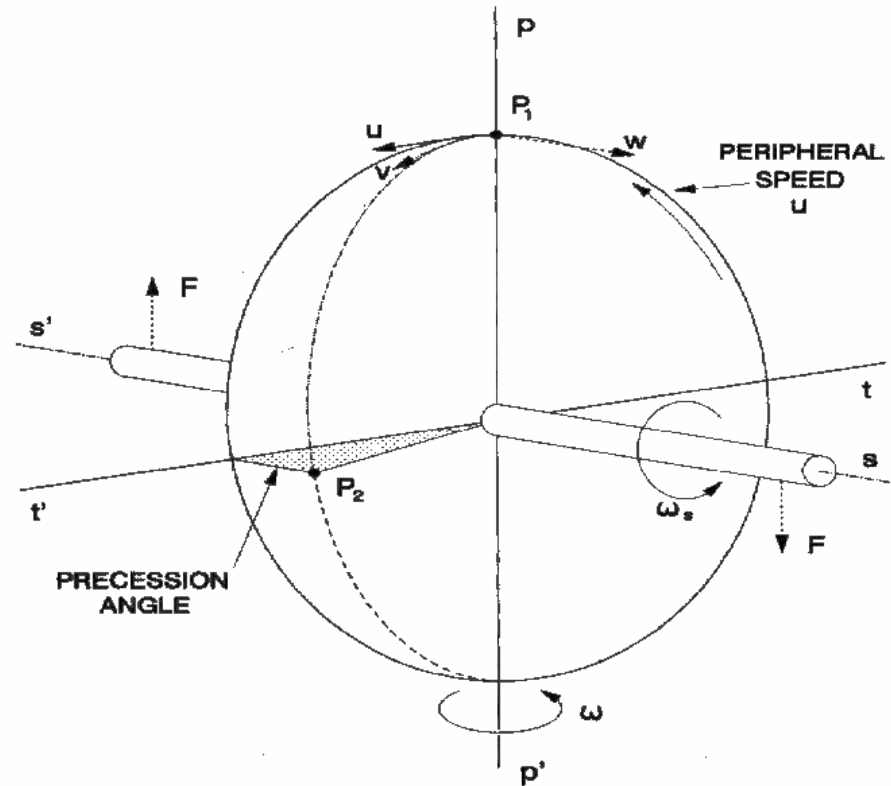
Miden velocidad angular o ángulo de rotación respecto de un sistema inercial.

3 principios:

- a) Rotatorios: Un masa rotando en un eje sostenido por un guimbal. Un par ortogonal al eje induce una precesión medible del mismo.
- b) Vibratorios: En una masa vibrante forzada a rotar se originan fuerzas de Coriolis que inducen vibraciones secundarias ortogonales a la vibración original. La velocidad angular se mide midiendo dichas vibraciones.
- c) Ópticos: Un laser multi-reflejado (espejos) o conducido en una fibra óptica cambia el tiempo de su recorrido con las rotaciones del recinto que lo contiene.

Precesión de un Giróscopo Rotatorio

s-s': eje de rotación
t-t': eje del par aplicado (F-F)
P-P': eje de precesión
u: velocidad del elemento P
w: velocidad agregada por el par.
v: velocidad resultante.



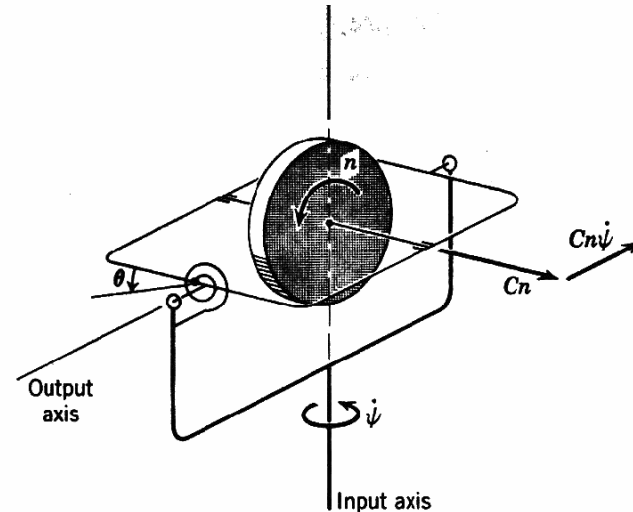
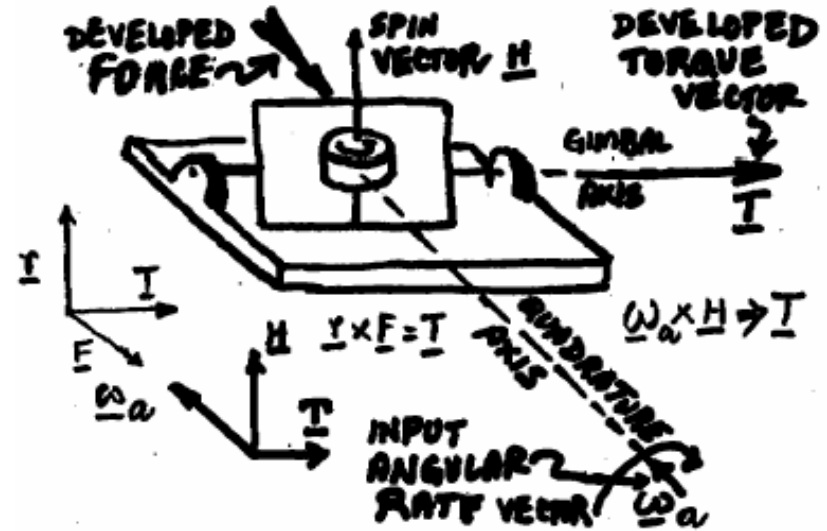
Medición de velocidad angular (rate-gyro)

Con resorte de balanceo

- La velocidad angular sobre el eje de cuadratura desarrolla un par sobre el eje del guimbal

$$T = \omega_a \times H$$

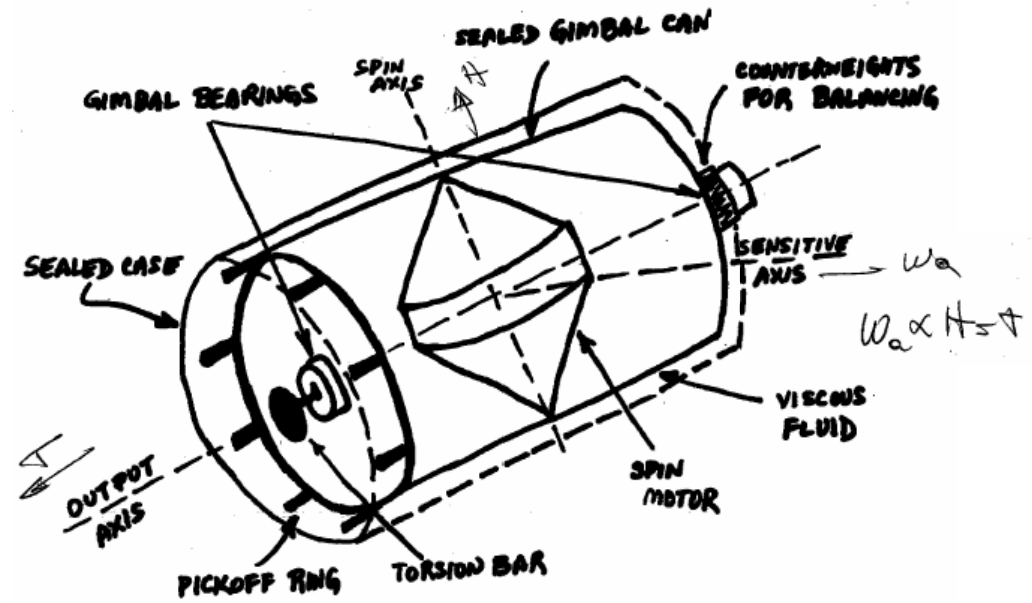
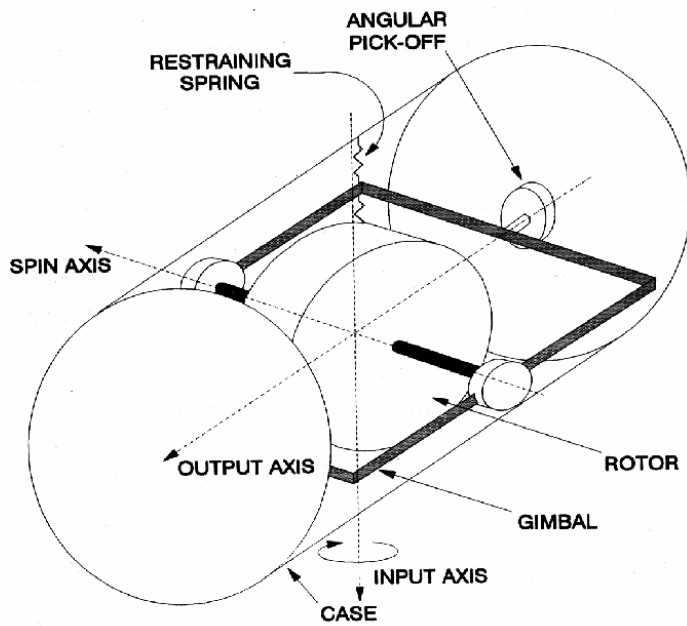
- En lugar de dejarlo rotar libremente un resorte balancea el par.
- La excursión angular del guimbal es proporcional al par T y a la velocidad angular ω



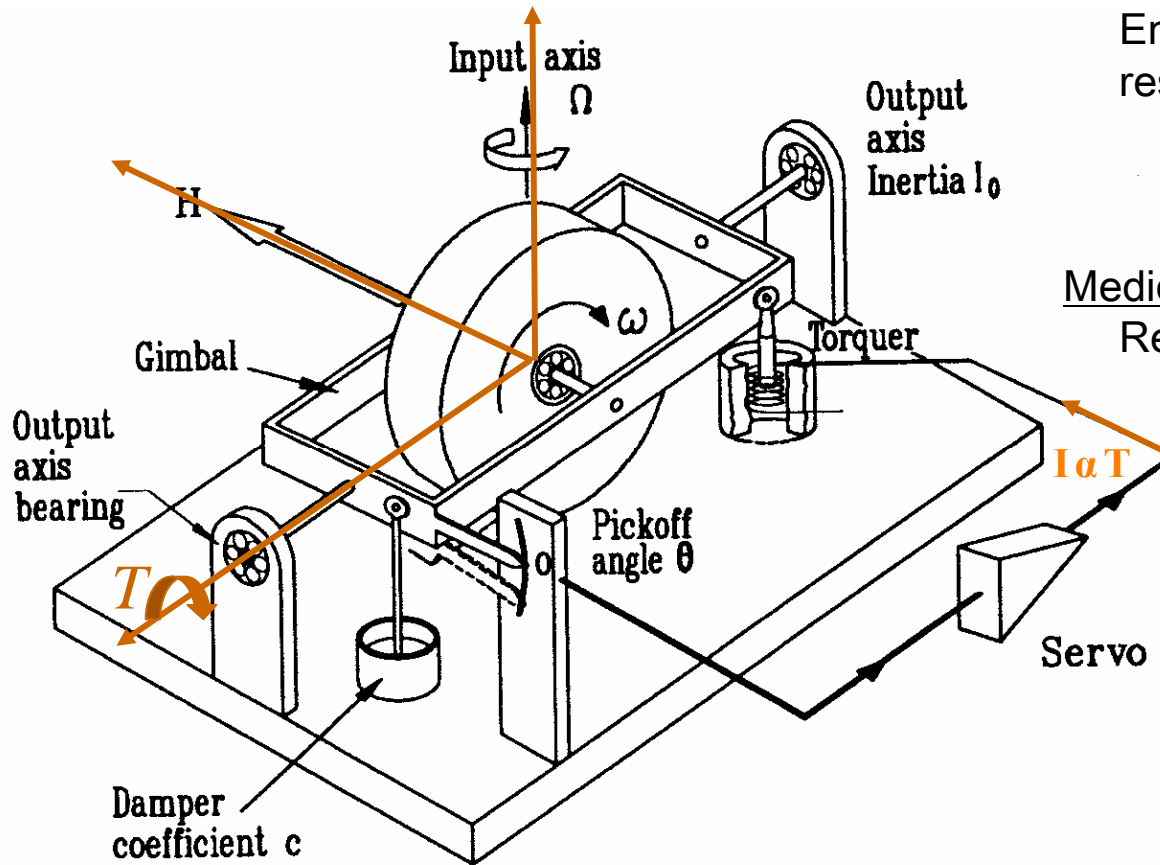
Medición de velocidad angular (rate-gyro)

Giros encapsulados

- Resorte barra de torsión
- Amortiguamiento viscoso evita oscilaciones
- Viscosidad del fluido sensible a la temperatura
- Requiere temperatura controlada del interior (70° 80° C)



“Rate Integrating Gyros”



Medición de ángulo:

En fluido viscoso y sin resorte: Vel. preces. $\equiv \Omega$

$$\Delta\theta \equiv \int \Omega dt = \Delta\phi$$

Medición de velocidad:

Realimentado con un servo:

$$\Omega \Rightarrow T = \frac{\Delta H}{\Delta t} \equiv \Omega$$

$$\xrightarrow{\text{Servo}} \Delta\theta \rightarrow 0$$

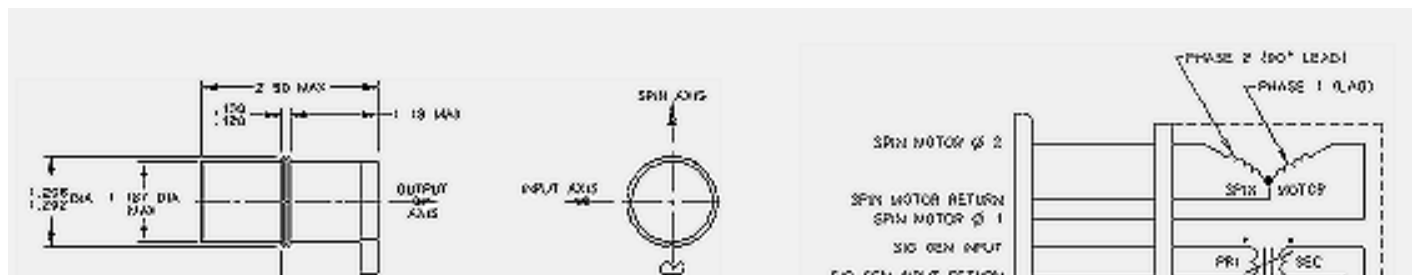
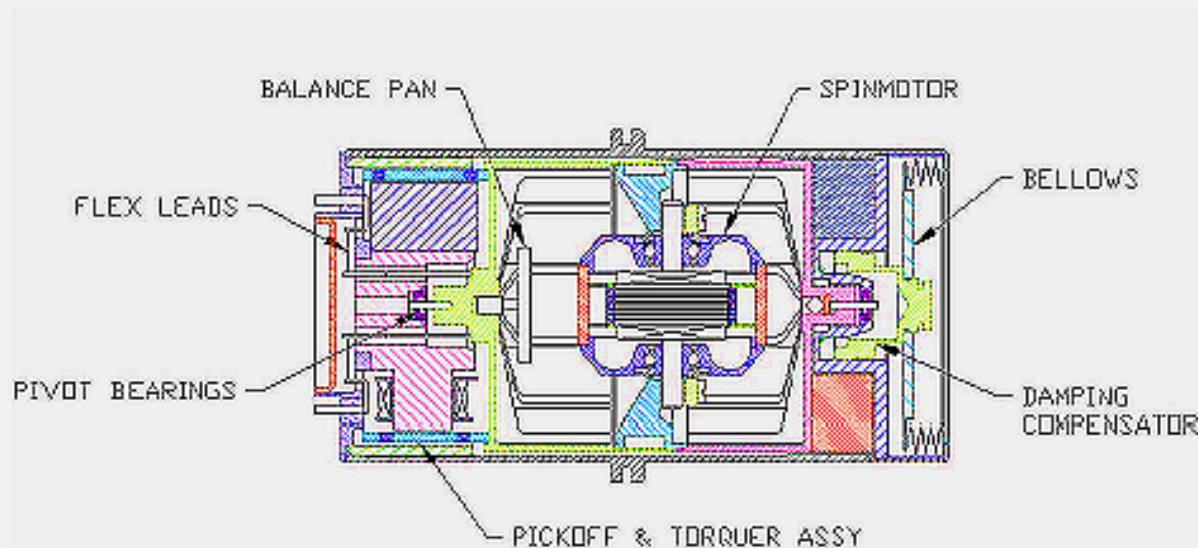
$$\rightarrow I \equiv T \equiv \Omega$$

Rate Integrating Gyro



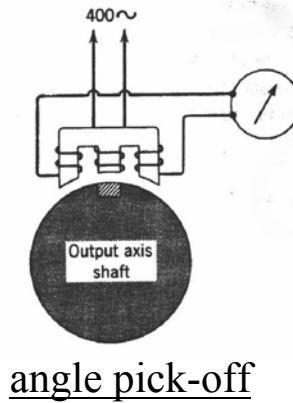
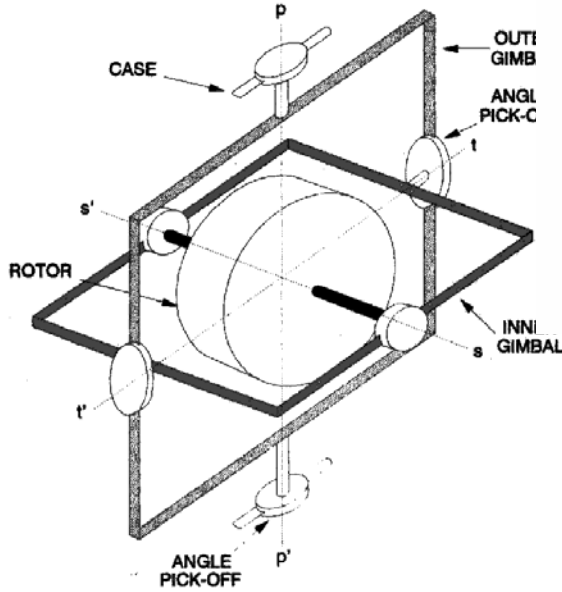
Rate Integrating Gyroscopes 446 Series

Form, Fit and Function replacements for Honeywell GG1111
and BAE GI-G6 Series



Medición de ángulos

De dos grados de libertad



Los dos ejes están libres.

El eje del giróscopo está estabilizado en el espacio.

Los ángulos rotados por la caja alrededor de los ejes (ext. e int.) miden desplazamiento angular de la “caja” respecto de un eje inercial de referencia.

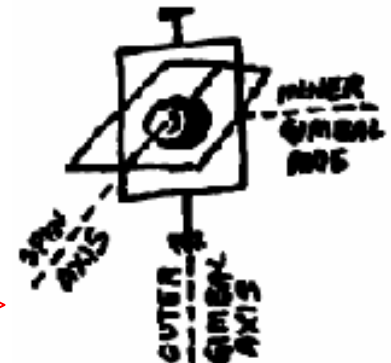
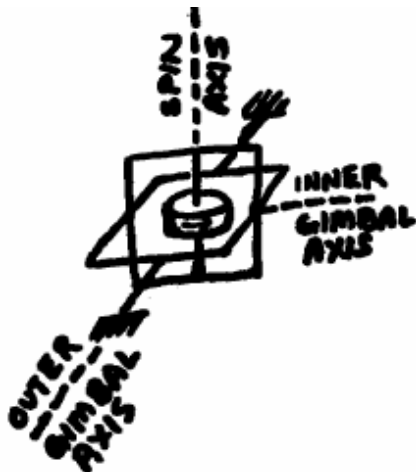
El eje externo fijo al vehículo

Giro vertical:

Spin vert. eje externo horiz.: sensible a rotaciones en plano horiz.

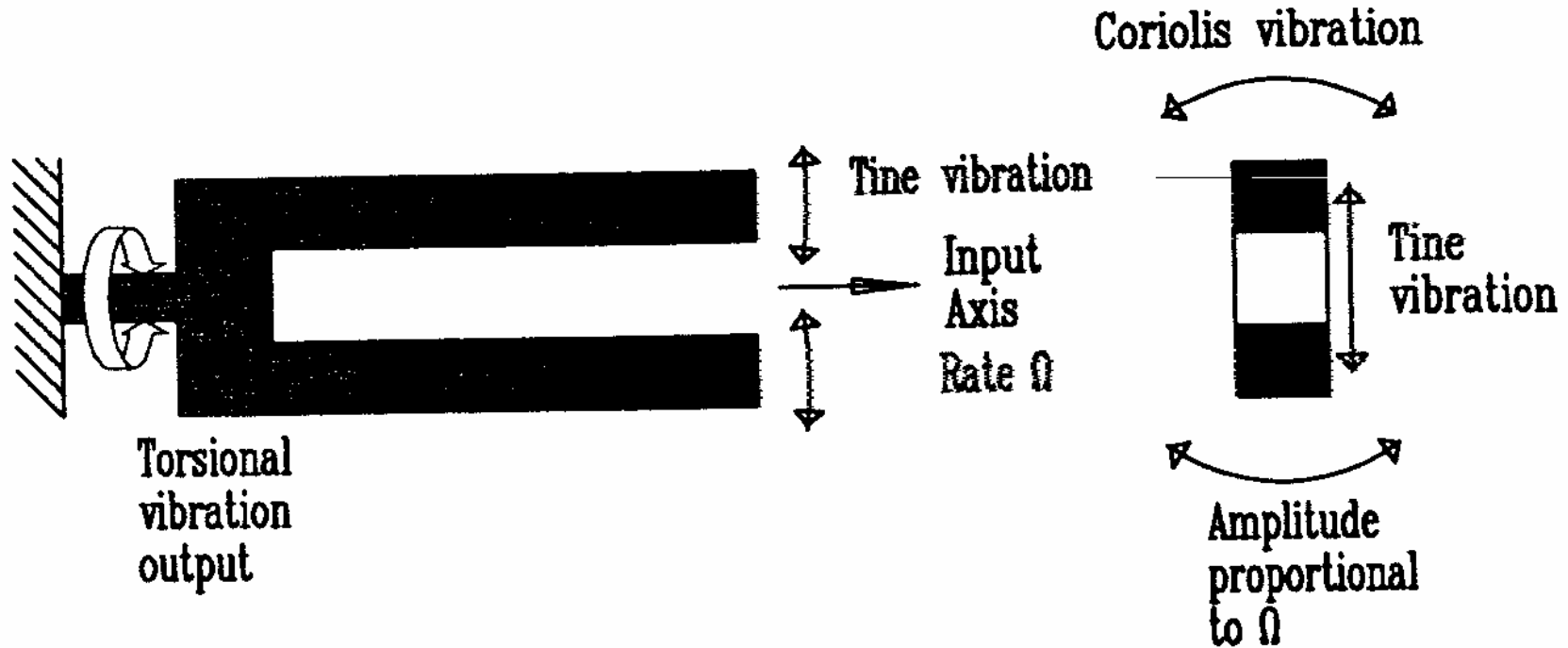
Giro direccional:

Spin horiz. eje externo vert.: sensible a rotaciones en el eje vert.



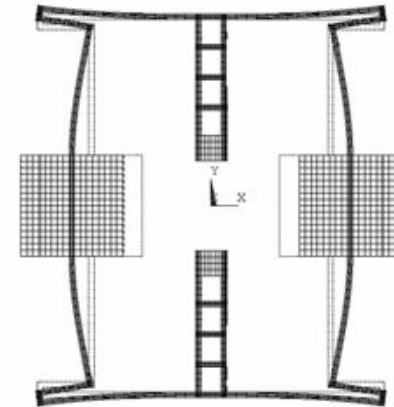
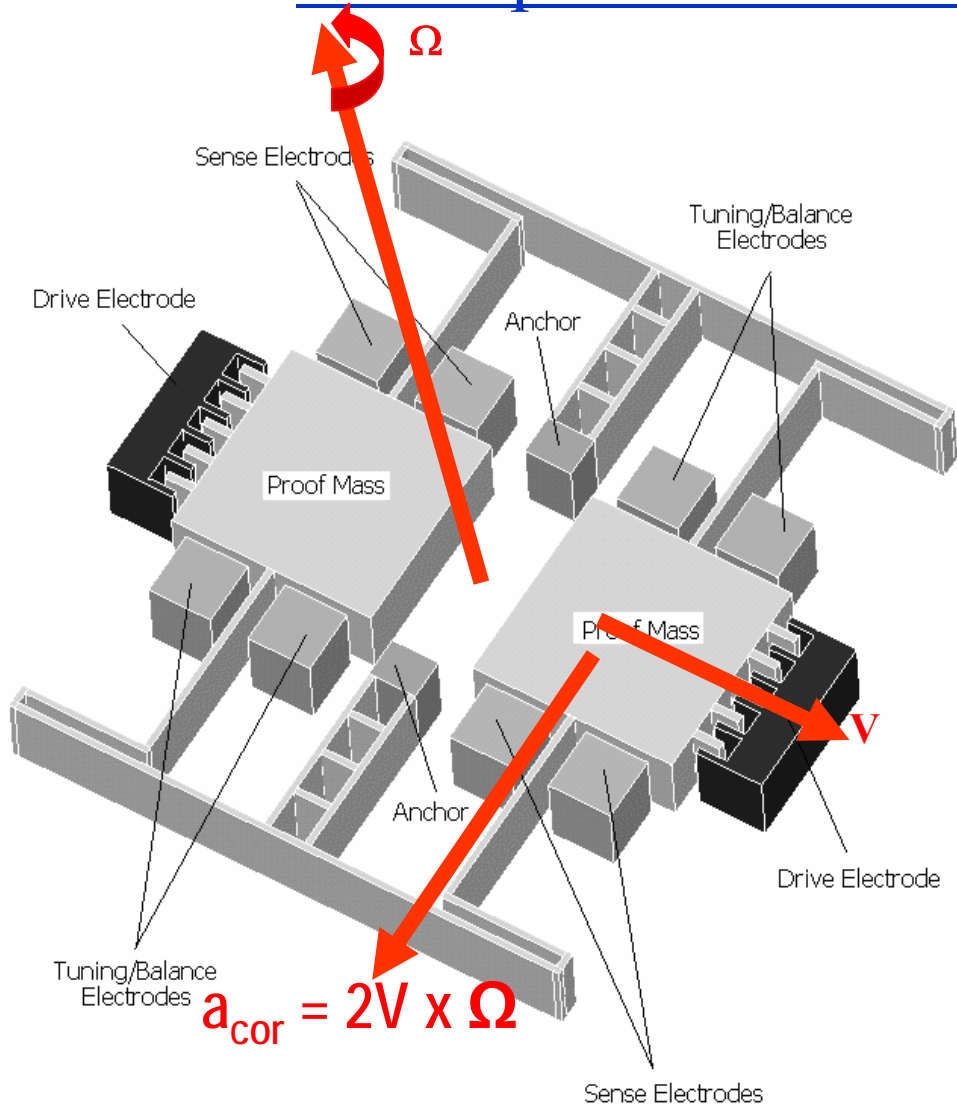
Giroscopos vibratorios QFLEX

Diapasón Sintonizado “Tuning Fork Gyro”

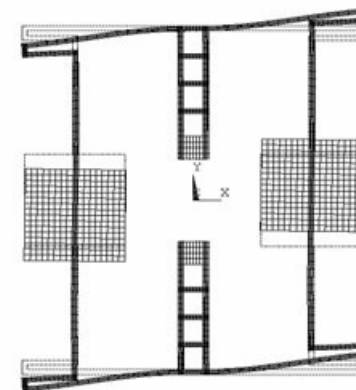


Una vibración eléctricamente inducida sobre las ramas modula el momento de inercia alrededor del eje sensible generando una vibración de torsión en el pie del diapasón, que es lo que se mide.

Diapasón sintonizado en silicio (MEMS bulk silicon) de alta performace del Georgia Tech



Modo de excitación



Modo de sensor

Principales fabricantes y tecnologías en giróscopos MEMS

Company	Rate Axis	MEMS	Drive	Sense	Package Type	Seal Ambient
Bosch	Z	Bulk	Electromagnetic	Capacitive	Metal header	Atmosphere
Bosch	X/Y	Polysilicon	Electrostatic	Capacitive	Metal header	Vacuum
BEI	Z	Quartz	Piezoelectric	Piezoelectric	Metal header	Atmosphere
Silicon Sensing	Z	Bulk	Electromagnetic	Electromagnetic	Metal header	Vacuum
ADI	Z	Poly	Electrostatic	Capacitive	Ceramic	Atmosphere

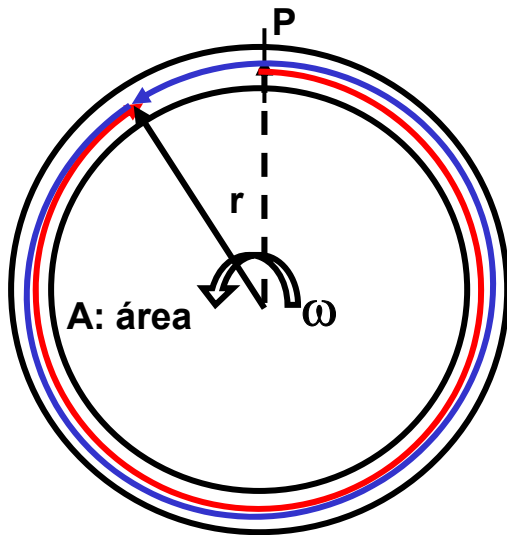
Giróscopos ópticos

- Dos tipos:
 - a) Giróscopos laser de anillo “RLG”;
 - b) Giróscopos de fibra óptica “FOG”.
- Ventajas:
 - Amplio rango dinámico.
 - Salida digital.
 - Inmune a aceleraciones, choques o vibraciones.
 - Operan a alta frecuencia (khz)
 - Larga vida útil.
 - Sin masas rotatorias o vibrantes.
 - Sin acoplamiento con rotación en dirección coplanar.
 - Precisos: sesgos $0.001 \text{ }^\circ/\text{hr}$; Error F.S. (1-10 ppm).

Giróscopos ópticos

Principio de funcionamiento: Efecto Sagnac:

- 2 rayos de luz en direcciones opuestas recorren distintos caminos ópticos en presencia de $\omega \neq 0$.
- Diferencias de camino sólo detectables con fuentes luminosas de alta pureza espectral.



$$\left. \begin{array}{l} ct_+ = 2\pi r + r\omega t_+ \\ ct_- = 2\pi r - r\omega t_- \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta t = t_+ - t_- = \frac{4\pi r^2 \omega}{c^2 - r^2 \omega^2} \approx \frac{4A\omega}{c^2}$$

$$\Rightarrow \Delta L = c\Delta t = \frac{4A\omega}{c} \approx 1 \text{ nm} (10^{-9} \text{ m})$$

A: área encerrada por el circuito.

L: longitud del circuito; ΔL diferencia de caminos.

λ : longitud de onda de la luz (típico $632.8 \times 10^{-9} \text{ m}$).

f: frecuencia de la luz [cicl]/[seg].

Giróscopo laser (de tres espejos)

- La longitud del camino determina la frecuencia de resonancia de “la cavidad laser” asociada al camino.
- El detector mide el “batido” entre los rayos con caminos opuestos.

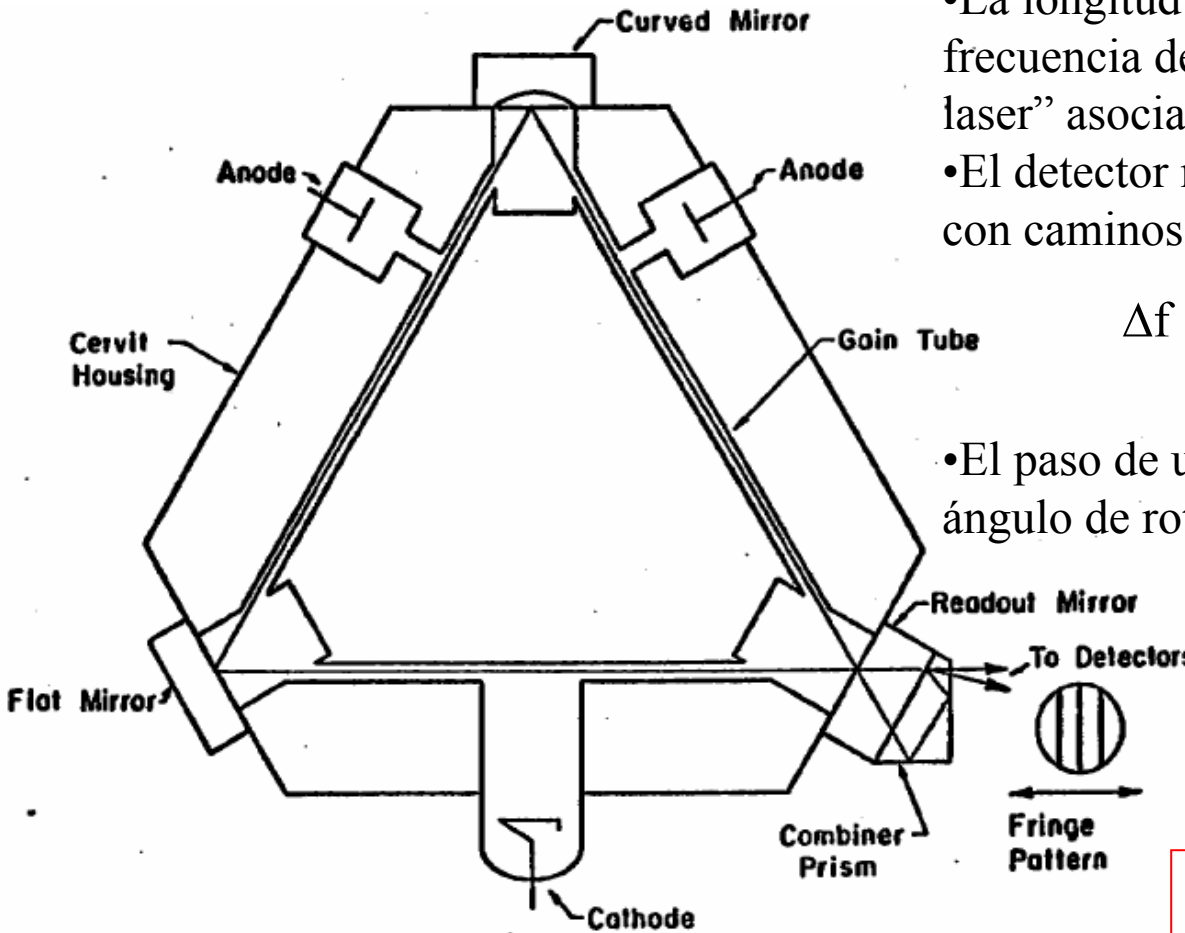
$$\Delta f = \frac{\Delta L}{L} f = \frac{4A\omega}{L(c/f)} = \frac{4A}{L\lambda} \omega$$

- El paso de una franja corresponde a un ángulo de rotación:

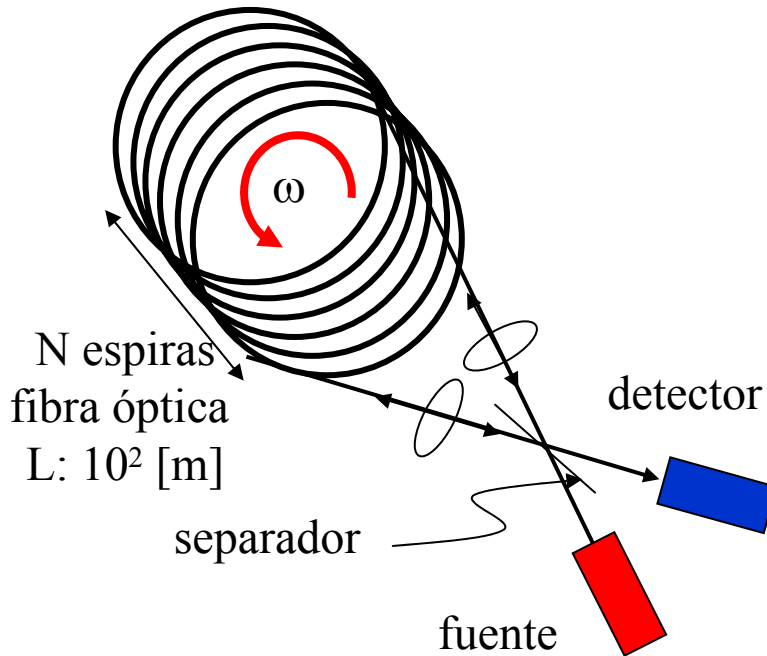
$$\Delta\theta = \int \omega dt = \frac{L\lambda}{4A} \underbrace{\int \Delta f dt}_{1 \text{ ciclo}}$$

$$\frac{L\lambda}{4A} \text{ típica} = 2 - 5 \frac{\text{arc sec.}}{\text{franja}}$$

Performance:
 sesgo > 0.001 °/hr;
 error FS ~ (1-10 ppm).



Giróscopo de fibra óptica (FOG)



- Mide diferencias de fase entre ambos haces.

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{8\pi NA\omega}{\lambda c} = \frac{4\pi RL\omega}{\lambda c}$$

- Se lo usa en lazo cerrado como detector de cero.
- Sensible a la temperatura.
- No requieren espejos ni maquinado de precisión.
- Mas robustos y mas baratos que los RLG.
- Performance:
 - sesgo: 0.5-50°hr
 - error SF: 500 5000ppm
- Baja sensibilidad por “c” en el denominador
- Rta. sinusoidal con máxima sensibilidad en $\omega=0!$

Uso de Giróscopos para Estabilización de Plataformas

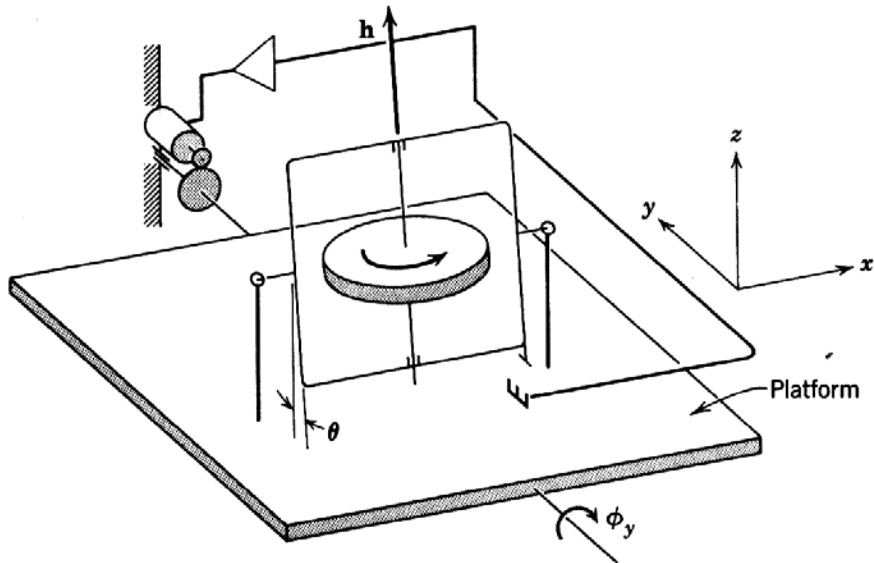


Fig. 6.8-2. Single-axis platform to maintain angular orientation about y axis.

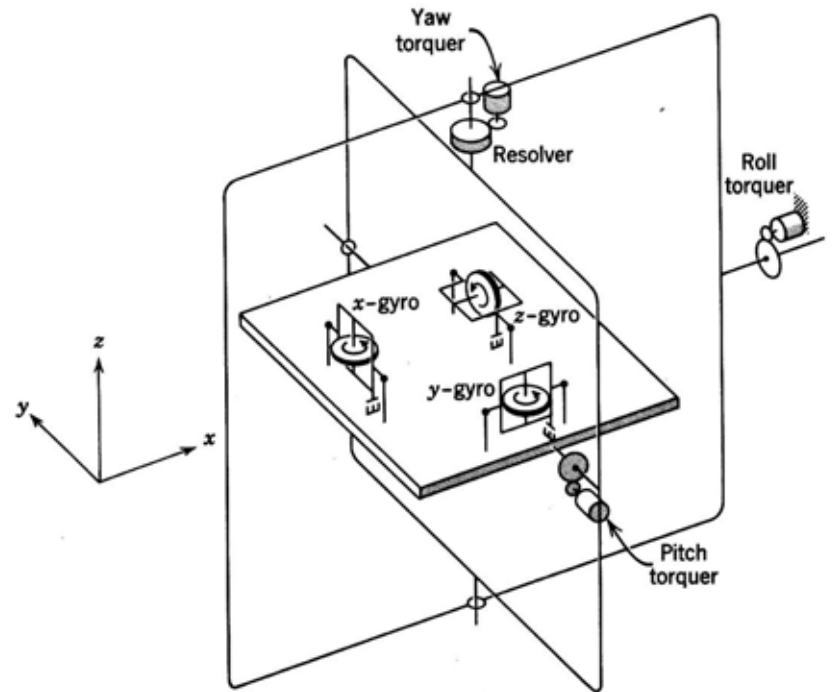


Fig. 6.8-1. Stable platform for inertial guidance.

Modelos de sensores inerciales

$$\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{M}(\mathbf{m}^b, \mathbf{p}, \xi_m)$$

\mathbf{m}^b : magnitud inercial en coordenadas del sensor (cuerpo):
velocidad angular ω ó fuerza específica f

\mathbf{p} : vector de parámetros del modelo del sensor.

$\hat{\mathbf{m}}$: medición de \mathbf{m}^b .

ξ_m : perturbaciones estocásticas (ruidos)

Modelo típico de una terna de sensores:

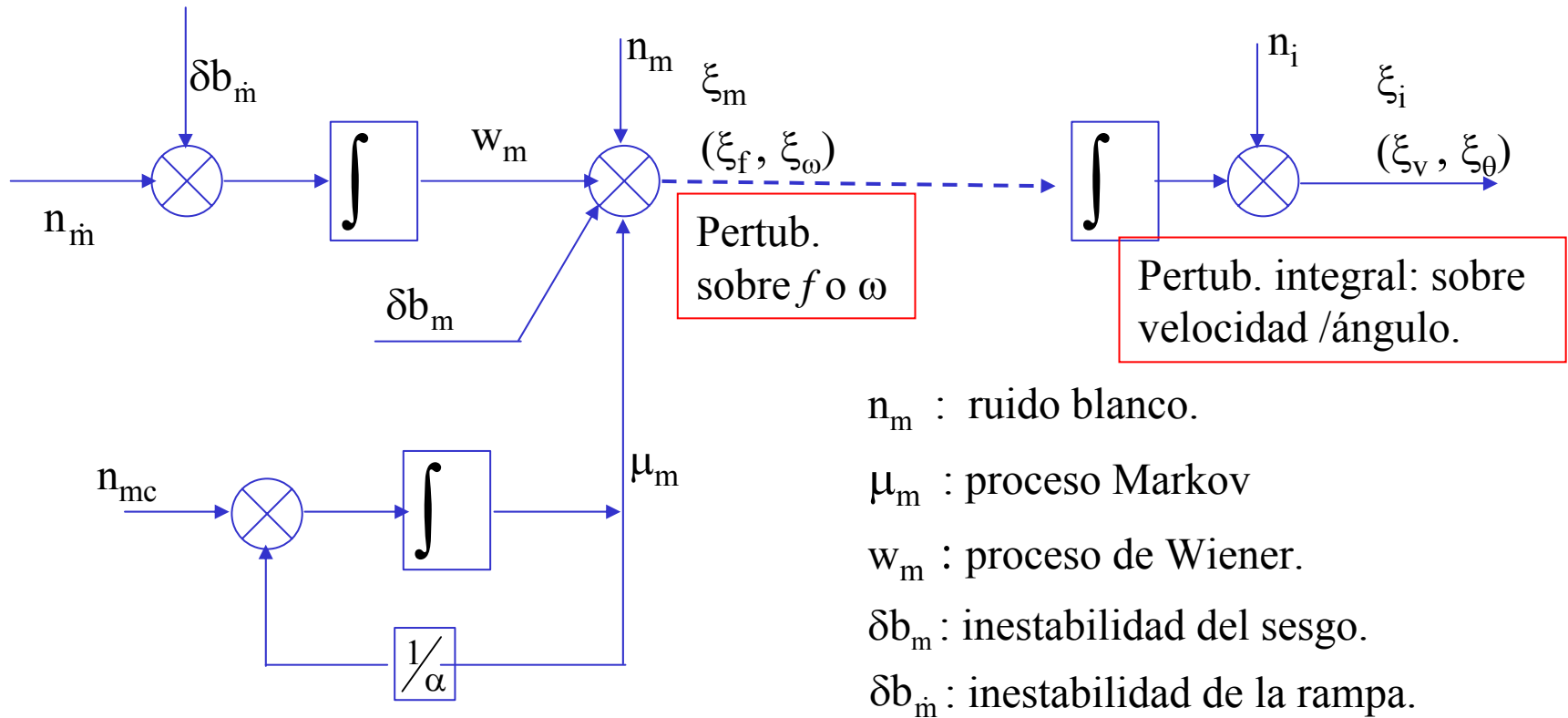
$$\hat{\mathbf{m}}^b = (\mathbf{I} + \Sigma_m) \mathbf{m}^b + \mathbf{b}_m + \xi_m \in \mathbb{R}^3$$

$$\Sigma_m(\sigma_m) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}_m$$

- $\sigma_{x,y,z}$: Error en factor de escala [%][ppm].
- σ_{vw} : Desalineamiento resp. terna ortog.[°]
- \mathbf{b}_m : Sesgo (*bias*) vectorial [U]
- ξ_m : Perturbación estocástica aditiva.

Se calibran en laboratorio. Su “inestabilidad”: δ_m , es una v.a.

Modelo de las Perturbaciones Estocásticas



NOTA: δb_m variable aleatoria de variancia expresada en unidades de medida: $^\circ/\text{seg}$, m/seg^2 , g . En el caso de las rampas: $^\circ/\text{seg}^2$, m/seg^3 , g/seg .

Caracterización de las perturbaciones estocásticas (procesos estacionarios de 2° orden)

Momentos de 1° y 2° orden

- Valor medio:

$$\bar{\mathbf{u}} \triangleq E\{\mathbf{u}(t)\}$$

- Función de autocorrelación :

$$\mathbf{R}_{uu}(t_1, t_2) \triangleq E\{u(t_1)u(t_2)\} = E\{u(t_1)u(t_1 + \tau)\}$$

$$\mathbf{u}(t) \text{ estacionario} \Rightarrow \mathbf{R}_{uu}(t_1, t_2) = \mathbf{R}_{uu}(\tau)$$

- Transformada de Fourier:

$$\text{si } \int \|\mathbf{R}_{uu}(\tau)\| d\tau < \infty \Rightarrow \mathbf{S}_{uu}(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{uu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad \mathbf{R}_{uu}(\tau) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{uu}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- Propiedades: Si $H(s)$ es asintóticamente estable (polos en semiplano izquierdo)

$$\begin{array}{c} \mathbf{u}(t) \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow \mathbf{y}(t) \end{array} \quad \mathbf{S}_{yy}(\omega) = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{H}(j\omega)^* \mathbf{S}_{uu}(\omega) = \|\mathbf{H}(j\omega)\|^2 \mathbf{S}_{uu}(\omega)$$

- Densidad espectral de potencia de la señal (PSD):

- Potencia promedio:

$$E\{\mathbf{u}(t)^2\} [U]^2 = \mathbf{R}_{uu}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{uu}(\omega) d\omega \geq 0; \quad \text{PSD}(\omega) = \mathbf{S}_{uu}(\omega) [U]^2 / [\text{rad/sec}]$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow E\{\mathbf{u}(t)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{uu}(f) df; \quad \text{PSD}(f) = \mathbf{S}_{uu}(f) [U]^2 / [\text{Hz}] \geq 0$$

Caracterización de las perturbaciones estocásticas

(cont.)

Definición de “ruido blanco continuo” $n(t)$ [U] :

- 1) $E\{n(t)\}=0$;
- 2) $S_{nn}(f) = \text{cte.} = \sigma_n^2 \left[[U]^2 / [Hz] \right]; \Rightarrow \sigma_n [U] / \sqrt{[Hz]}$;
- 3) $R_{nn}(\tau) \left[[U]^2 \right] = \sigma_n^2 \delta(\tau) \Rightarrow \delta(\tau) [T]^{-1} : \text{"Delta de Dirac"} \int \delta(\tau) [T]^{-1} dt \triangleq 1$

Proceso Markoviano $\mu(t)$ que consideraremos

$$\underbrace{n(t)} \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow \mu(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Ej.: } \dot{\mu} &= -\alpha \mu + \alpha n(t); \quad \alpha > 0 \\ (d\mu &= -\alpha \mu dt + \alpha dw(t)) \end{aligned}$$

Si $H(s)$ asintóticamente estable, $\mu(t)$ asintóticamente estacionario de 2º orden.

• Primeros 2 momentos de $\mu(t)$:

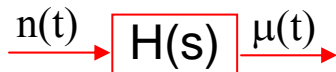
- 1) $\bar{\mu}(t) = E\{\mu(t)\}$ satisface :

$$\bar{\mu}(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} \bar{\mu}(t_0) + \underbrace{E\left\{ \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\lambda)} n(\lambda) d\lambda \right\}}_{=0} = e^{-\alpha(t-t_0)} \bar{\mu}(t_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} R_{\mu\mu}(t, t + \tau) = R_{\mu\mu}(\tau) = \frac{\sigma_n^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|H(j\omega)\|^2 e^{j\omega\tau} d\omega \Rightarrow S_{\mu\mu}(\omega) = \|H(j\omega)\|^2 \sigma_n^2$

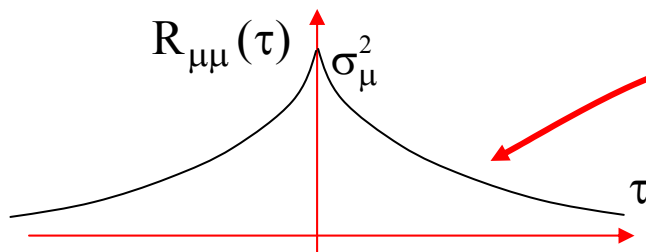
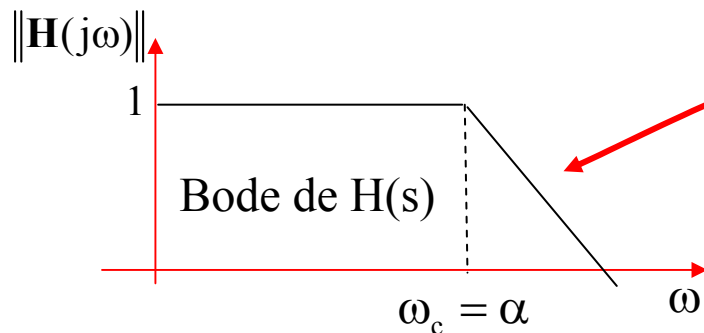
Caracterización de las perturbaciones estocásticas (cont.)

Espectro de Potencia y Autocorrelación de un Ruido Blanco Filtrado.



$\mu(t)$ Gauss-Markof si $n(t)$ blanco Gaussiano.

$$E\{\mu(t)^2\} = \mathbf{R}_{\mu\mu}(0) = \frac{\sigma_n^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{H}(j\omega)\|^2 d\omega$$



Ejemplo :

$$\dot{\mu} = -\alpha \mu + \alpha n(t); \quad \alpha > 0; \quad E\{\mu(t)\} \rightarrow 0$$

Espectro de potencia :

$$S_{\mu\mu}(\omega) = \|\mathbf{H}(j\omega)\|^2 \sigma_n^2 = \frac{\alpha^2 \sigma_n^2}{\omega^2 + \alpha^2}$$

Potencia promedio:

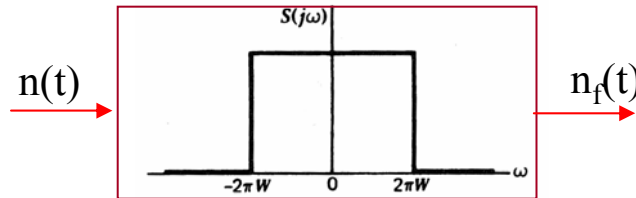
$$E\{\mu(t)^2\} = \frac{\alpha^2 \sigma_n^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 + \alpha^2} = \frac{\sigma_n^2 \alpha}{2} = \sigma_\mu^2$$

Func. de autocorrelación exponencial :

$$R_{\mu\mu}(\tau) = \frac{\alpha^2 \sigma_n^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{\omega^2 + \alpha^2} = \sigma_\mu^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

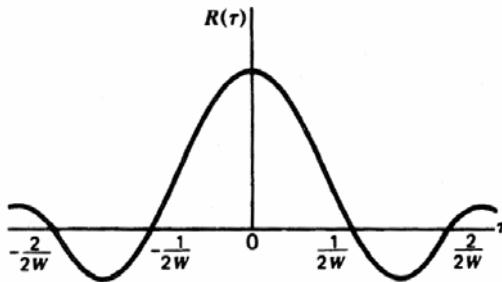
Modelo de Ruido Blanco Muestreado

- Antes de muestrearlo es necesario filtrarlo (*band-limited white noise*)
- → Filtro *antialiasing* ideal de ancho de banda W_f y ruido blanco de $\text{PSD} = \sigma_n^2$



$$S_{nf}(\omega) \begin{cases} \sigma_n^2, & |\omega| \leq 2\pi W_f \\ 0, & |\omega| > 2\pi W_f \end{cases}$$

- Función de autocorrelación del ruido filtrado



$$R_{nf}(\tau) = 2W_f \sigma_n^2 \frac{\sin(2\pi W_f \tau)}{2\pi W_f \tau}$$

$$R_{nf}(0) = \sigma_{nf}^2 = 2W_f \sigma_n^2$$

- Correlación próxima a cero para: $\tau = 1/2W_f = T_s \Rightarrow \sigma_{nf}^2 [U]^2 = \frac{\sigma_n^2 [U]^2 [S]}{T_s [S]}$

Caracterización de las perturbaciones estocásticas

(cont.)

Movimiento Browniano/proceso de Winner/ “random walk”: $w(t)$

- Definición : Es el proceso Gauss-Markoviano caracterizado según:

$$n(t)[U] \xrightarrow{t=0} \int \rightarrow w(t)[U][T] \quad w(t) = \int_0^t n(\lambda)d\lambda \Rightarrow dw(t) = n(t)[U]dt$$

- Primeros 2 momentos de $w(t)$

$$1) E\{w(t)\} = 0$$

$$2) R_{ww}(t_1, t_2) = E\{w(t_1)w(t_2)\} = E\left\{ \int_0^{t_1} n(\lambda)d\lambda \int_0^{t_2} n(\mu)d\mu \right\} =$$

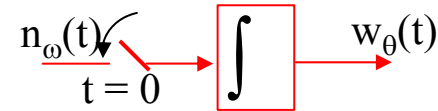
$$= \int_0^{t_1} d\lambda \int_0^{t_2} d\mu \underbrace{E\{n(\lambda)n(\mu)\}}_{\sigma_n^2 \delta(\lambda-\mu)} = \sigma_n^2 \min(t_1, t_2)$$

- El movimiento Browniano no es estacionario! Si $t_1 = t_2 = t \Rightarrow$

$$\sigma_w^2(t)[U]^2[T]^2 \triangleq R_{ww}(t, t) = \sigma_n^2 t$$

Ejemplo de ángulo browniano de un giróscopo

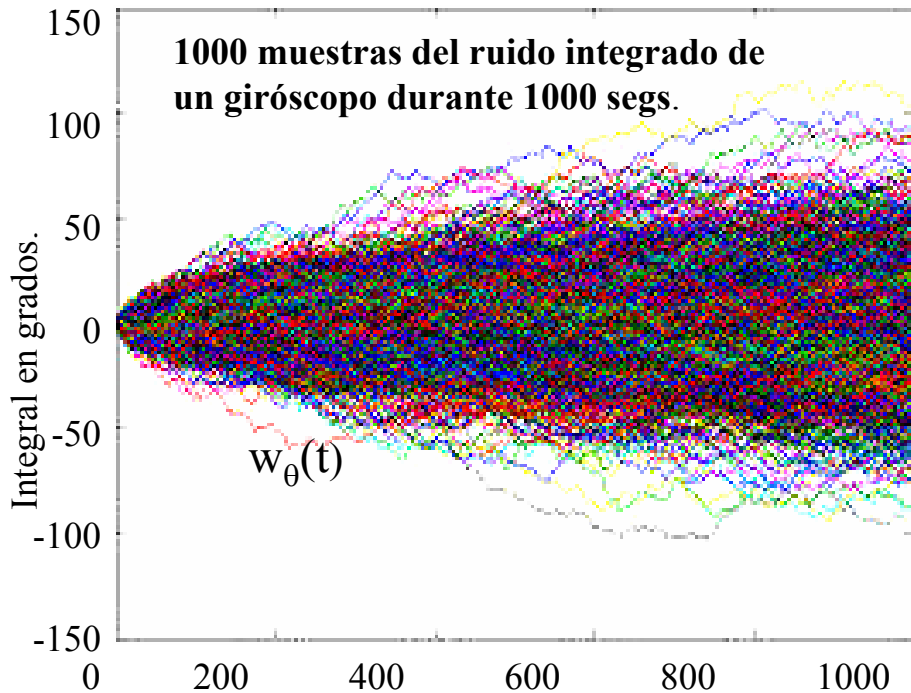
$$\theta(t) = \int_0^t \omega(\lambda) d\lambda$$



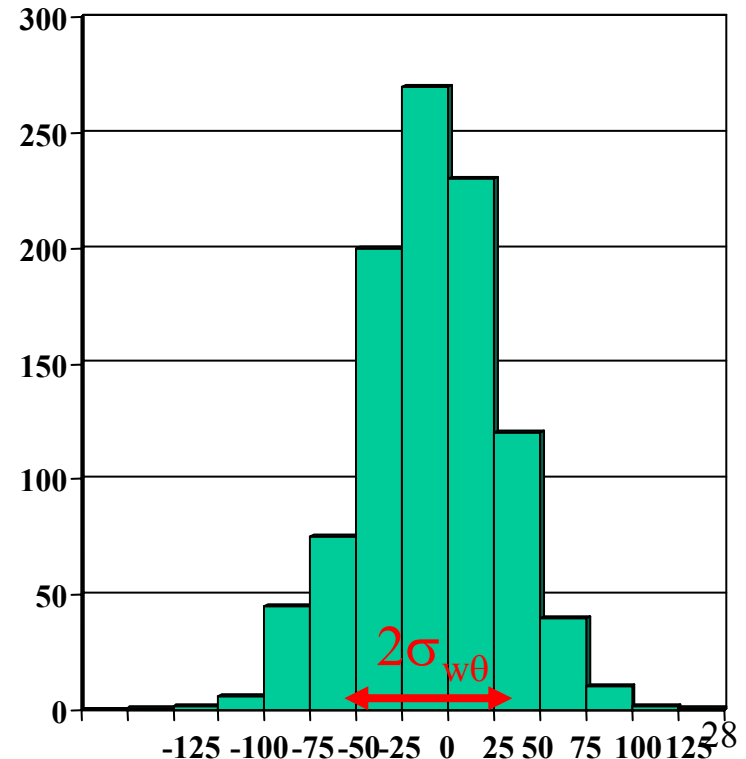
$$\sigma_{n\omega} = 0.99[^\circ/\text{seg}]/[\text{Hz}]^{-1/2} = 0.99[^\circ/\text{seg}^{1/2}] \Rightarrow \sigma_{w\theta} = \sigma_{n\omega} \sqrt{t[\text{seg}]} [^\circ] ; t = 1000 \Rightarrow \sigma_{w\theta} = 31[^\circ]$$

Ruido Blanco en ω (“Angle Random Walk”)

$$0.99[^\circ/\text{seg}^{1/2}] = 59.4 [^\circ/\text{hr}^{1/2}]$$



Distribución de θ a los 1000seg.



Nomenclatura y equivalencias

- Giróscopos:
 - Ruido Blanco en ω (“rate white noise”) \Rightarrow Angulo Browniano (ARW)
 - PSD \rightarrow ARW: $1[^\circ/\text{seg}]/\text{Hz}^{1/2} = 1[^\circ/\text{seg}^{1/2}] = 60 [^\circ/\text{hr}^{1/2}]$,
 - Resolución (rms) $[^\circ/\text{seg}] = \{\text{PSD}[^\circ/\text{seg}]^2/[\text{Hz}] * \text{AB}[\text{Hz}]\}^{1/2}$
 - Ruido Blanco en ω' \Rightarrow ω Browniana (“rate random walk”)
 - $1[^\circ/\text{s}^2]/[\text{Hz}^{1/2}] = 60^3[^\circ/\text{hr}]/[\text{hr}^{1/2}]$,
 - Inestabilidad/variancia del sesgo (“rate bias instability”)
 - $1[^\circ/\text{hr}] = 0,00028[^\circ/\text{s}]$
- Acelerómetros:
 - Ruido blanco en f (“accel. white noise”) \Rightarrow Velocidad Browniana (VRW)
 - PSD \rightarrow VRW: $1[\text{g}]/\text{Hz}^{1/2} = 9,8 [\text{m/s}]/[\text{seg}^{1/2}] = 588 [\text{m/s}]/[\text{hr}^{1/2}]$
 - Resolución (rms) $[\text{g}] = \{\text{PSD}[\text{g}]^2/[\text{Hz}] * \text{AB}[\text{Hz}]\}^{1/2}$
 - Aceleración Browniana (“accel. random walk”)
 - $[\text{mg}]/[\text{hr}^{1/2}]$, $[\text{mg/s}]/[\text{Hz}^{1/2}]$, $[\mu\text{g}]/[\text{hr}^{1/2}]$, $[\mu\text{g/s}]/[\text{Hz}^{1/2}]$
 - Inestabilidad /variancia del sesgo (“accel. bias instability”)
 - $[\text{mg}]$, $[\mu\text{g}]$

Calidad y Categorías de Giróscopos

- Calidad “Navegación”: Horas de navegación sin ayuda.
- Calidad “Aviación”: Alcanzan calidad navegación con ayuda externa
- Calidad “Táctico” : Navegación sin ayuda en segundos o pocos min.
 - Alcanzan calidad navegación con ayuda externa.
- Calidad “Baja (o rate grade)”: Sólo útiles con ayuda externa.

<i>Parámetro/ Calidad</i>	<i>Rate grade MEMS</i>	<i>Tácticos MEMS FOG</i>	<i>Aviación RLG FOG</i>	<i>Navegación RLG ¿FOG?</i>
Angulo browniano (ARW) [°/√h]	>0,5	0,5-0,05	<0.05	<0,001
Inestabilidad del sesgo (drift) [°/h]	>10	1-10	<0.1	<0,01 (1 nm/hr)
Inestabilidad del factor de escala %	0,1-1	0,01-0,1	<0.01	<0,001
Rango de medición [°/seg]	50-1000	>500	50-300	>400
Ancho de Banda [Hz]	>70	~500	~100	100-500
Sobrevida al choque	10 ³	10 ³ -10 ⁴	10 ³	10 ³
COSTO IMU \$US	500-5K	5K-20K	20K-50K	50-100K

Calidad y Categorías de acelerómetros

<i>Parámetro/Calidad</i>	<i>Baja/Automóvil</i>	<i>Táctico</i>	<i>Navegación</i>
Ruido [g/ $\sqrt{\text{Hz}}$]	Estab. 0.5mg $\sqrt{\text{Hz}}$ “airbag” 5mg $\sqrt{\text{Hz}}$	50-500 [$\mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$]	<10 [$\mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$]
Inestabilidad del sesgo [g]	10-100[mg]	0.2-1[mg]	10-100 μg
Inestabilidad del factor de escala % (ppm)	>1%	100-1000 ppm	<100ppm
Rango de medición [g]	Sist. estab- 2. “airbag”- 50	>50	2-50
Ancho de Banda [Hz]	DC-400	50-300	50-300
Sobrevida al choque en 1 mseg	>2000g	<200g	>10g