

GUÍA METODOLÓGICA PARA LA OBTENCIÓN DE ALTURAS UTILIZANDO EL SISTEMA GPS

Instituto Geográfico Agustín Codazzi
División de Geodesia
geodesia@igac.gov.co

Carrera 30 No. 48 – 51
Santafé de Bogotá, D. C. – Colombia

Introducción

El sistema de posicionamiento global GPS puede ser empleado en la extensión del control vertical sobre aquellas zonas en donde no se cuenta con puntos de nivelación y la precisión requerida está dentro del orden trigonométrico.

Las posibilidades de operabilidad en cualesquiera hora, condiciones climáticas y del relieve permiten que el sistema GPS, unido a un modelo geoidal de alta resolución, sea una herramienta poderosa y económica en la determinación de nuevos puntos de referencia para propósitos geodésicos o topográficos.

La presente guía tiene por objeto proporcionar orientación acerca del trabajo de campo y oficina necesarios para la obtención de alturas equivalentes a las niveladas.

CONCEPTOS BÁSICOS

Teniendo como punto de partida el hecho de que el lector está familiarizado con la adquisición de datos GPS y su procesamiento, se definen brevemente los diferentes conceptos involucrados en la metodología (Figura 1).

- Elipsoide: Modelo físicomatemático que representa a la Tierra, caracterizado por las constantes geométricas a (semieje mayor) y f (aplanamiento), y los parámetros físicos ω (velocidad angular de rotación) y m (masa).
- Geoide: superficie equipotencial de referencia, hipotéticamente coincidente con el nivel medio del mar en calma. Actualmente, se cuenta con el modelo IGAC de alta resolución GEOCOL98, disponible en la División de Geodesia.
- Altura elipsoidal (h): Medida a lo largo de la normal elipsoidal, es la distancia entre la superficie del elipsoide y el punto de medición. La magnitud y dirección de este vector dependen del elipsoide empleado. En esta guía se adopta el modelo WGS84 en virtud de su amplia utilización por parte de los usuarios del sistema GPS.

- Altura Nivelada (H): Es la distancia vertical medida por el método de nivelación geométrica o trigonométrica entre uno o varios puntos dátum verticales (en el caso de Colombia es Buenaventura) y el punto de medición. Esta altura es llamada, incorrectamente, altura ortométrica.
- Altura ortométrica (H_{ort}): Es la distancia tomada en la dirección normal al geoide entre éste y el punto de medición. La curvatura de esta altura en la gráfica se debe al hecho de que la línea de plomada coincide con el vector gravedad a medida que atraviesa diferentes superficies equipotenciales, las cuales no son paralelas entre sí.

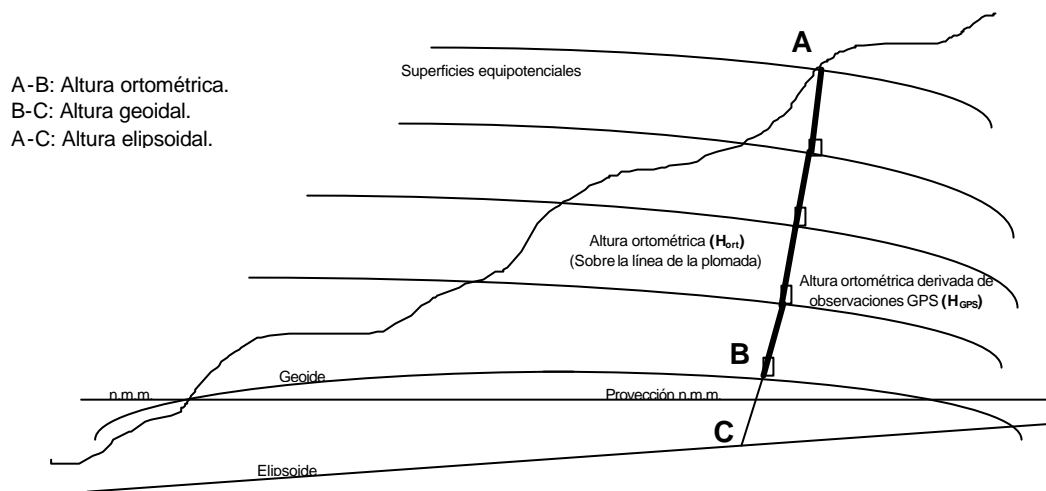


Figura 1. Definición de alturas.

- Ondulación geoidal (N): Tomada sobre la normal elipsoidal de un punto, es la distancia que separa al elipsoide del geoide.
- Altura nivelada GPS (H_{GPS}): Es la denominación que se ha dado a la altura de un punto obtenida por el método aquí planteado. Es equivalente, bajo las mejores condiciones, a la altura nivelada trigonométrica.

METODOLOGÍA EN CAMPO

Antes de exponer algunos posibles casos a resolver, es necesario puntualizar sobre aspectos básicos del rastreo :

- 1- El tiempo mínimo de rastreo sobre un punto debe ser de 15 minutos contados a partir de la estabilización del equipo y la disponibilidad mínima de 4 satélites.
- 2- Por cada kilómetro de distancia a la base se hacen 5 minutos adicionales. En casos en que la configuración del sistema sea excelente, el tiempo adicional por cada kilómetro puede reducirse a 3 minutos.

- 3- No debe haber tiempos de rastreo menores que 18 minutos.
- 4- Debe evitarse realizar rastreos sobre distancias mayores que 20 km. En los casos en que estas condiciones no se puedan cumplir, es necesario aumentar los tiempos de rastreo de acuerdo con lo planteado en el ítem 1.
- 5- Se sugiere, como una forma de mejorar los resultados, ejecutar rastreos dobles sobre cada punto involucrado; esto, con el ánimo de disminuir la ocurrencia de errores de tipo sistemático o aleatorios.
- 6- Los NPs ocupados deben ser, preferiblemente, de primer orden.

Caso 1. PUNTO : Determinación de la altura de un punto sobre el nivel medio del mar.

- A. Se toma como base inicial el punto geodésico IGAC - preferiblemente de primer orden - más cercano al área del proyecto.
- B. Se seleccionan al menos dos estaciones de nivel NP a las cuales se les traslada el control horizontal a partir del vértice seleccionado en A. De este modo, se definen valores de latitud, longitud, altura h , altura H y ondulación N GEOCOL98 para cada NP y el punto base. (Figura 2).

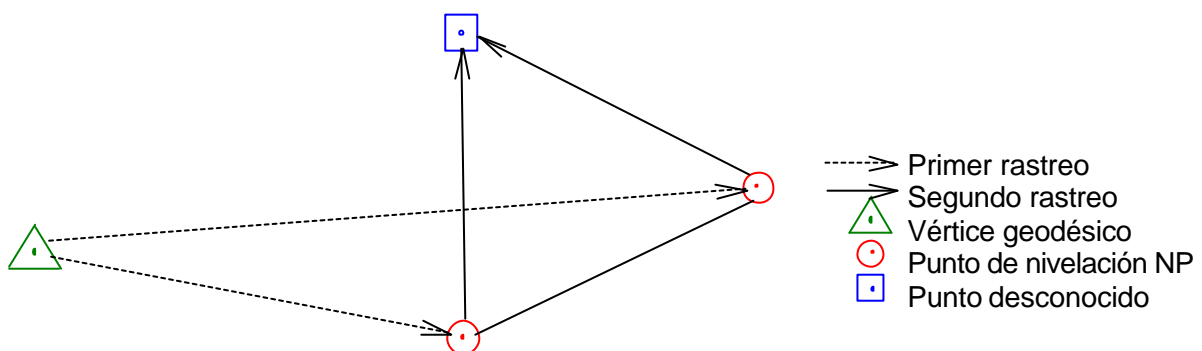


Figura 2. Determinación de la altura de un punto sobre el nivel medio del mar utilizando el Sistema GPS.

- C. Los dos NPs rastreados servirán como base para la determinación de cota del punto nuevo con altura desconocida (rover).

Los criterios de planeación y tiempos de rastreo se mantienen y la selección de la base estará en función de las conveniencias del proyecto.

Los datos que deben utilizarse en oficina para obtener la altura nivelada por medio de GPS (H_{GPS}) del punto nuevo son: Altura elipsoidal (h) del vértice geodésico, de los NPs y del punto nuevo ; altura nivelada (H) de los NPs, y la ondulación geoidal (N GEOCOL98) de todos los puntos involucrados.

Caso 2. PERFIL : Determinación de alturas para una serie de puntos dispuestos a lo largo de un perfil.

- A. Se toma como base inicial el punto geodésico IGAC - preferiblemente de primer orden - más cercano al área del proyecto.
- B. Se selecciona un NP al cual se le traslada el control horizontal a partir del vértice seleccionado en A, definiéndole valores de latitud, longitud, altura h , altura H y ondulación N GEOCOL98. Este NP se constituye en la nueva base para el rastreo del perfil.
- C. Para rastrear el perfil es necesario dividirlo en circuitos, cuyas longitudes se definen por la distancia horizontal entre la base y las estaciones ubicadas dentro de los siguientes 20 km. Alcanzada esta distancia, debe definirse una nueva base, la cual es el último punto del circuito inmediatamente anterior (Figura 3).

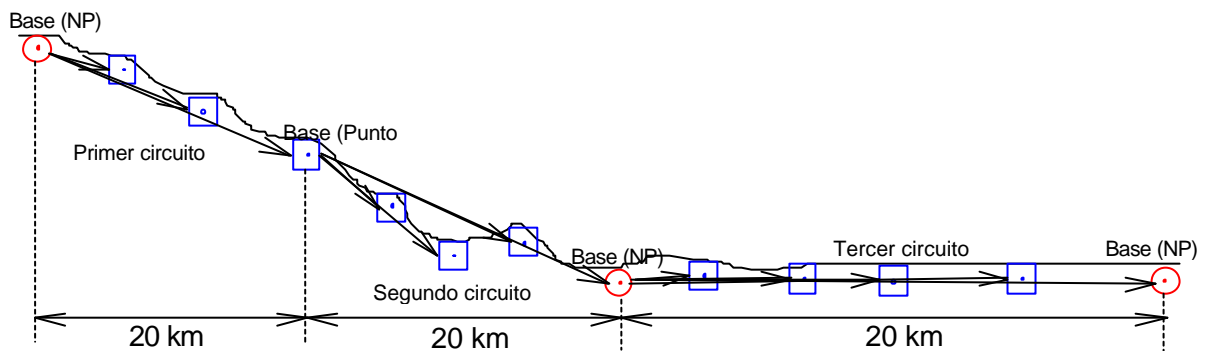


Figura 3. Determinación de la altura de los puntos contenidos en un perfil utilizando el Sistema GPS

- D. En el proceso se repiten los pasos B y C hasta finalizar la línea.
- E. El último punto rastreado en el proyecto debe ser un NP de tipo geodésico.

Si existen más NPs cercanos al área del proyecto, éstos deben involucrarse como bases en el rastreo de los diferentes circuitos.

Los datos que se utilizan en oficina para calcular la altura nivelada por medio de GPS (H_{GPS}) de los puntos nuevos son: Altura elipsoidal (h) y ondulación geoidal (N GEOCOL98) de todos los puntos utilizados y la altura nivelada (H) de los puntos NP.

Caso 3. SUPERFICIE: Determinación de alturas para puntos distribuidos en un área.

- A. Se toma como base inicial el punto geodésico IGAC - preferiblemente de primer orden - más cercano al área del proyecto.

- B. Se seleccionan por lo menos cuatro (4) NPs, a los cuales se les traslada el control horizontal a partir del vértice seleccionado en A, definiéndoles valores de latitud, longitud, altura h , altura H y ondulación N GEOCOL98. Estos NPs se constituyen en las nuevas bases para el rastreo de los puntos contenidos en la superficie (Figura 4).

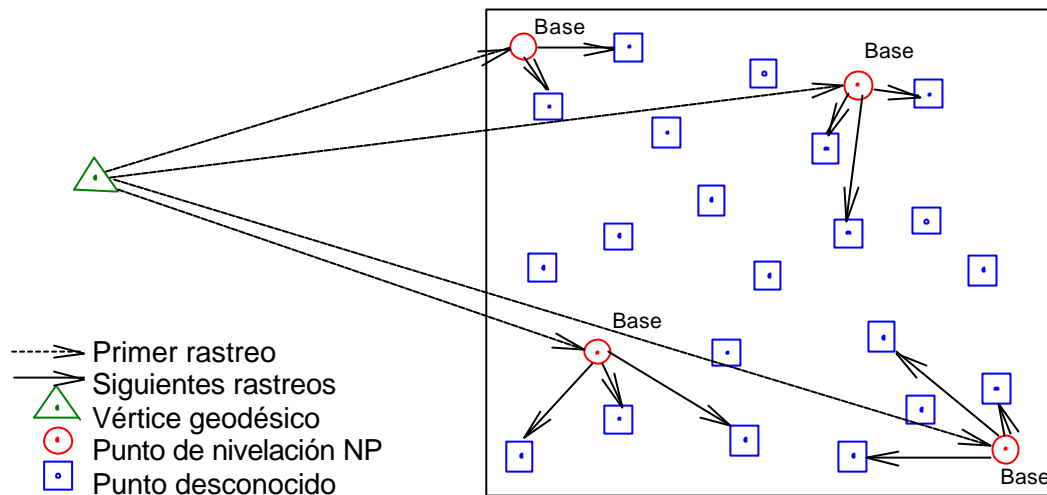


Figura 4. Determinación de la altura de los puntos contenidos en una superficie utilizando el Sistema GPS

- C. De acuerdo con las condiciones locales, se determinará la distribución de los puntos a rastrear por cada día, manteniendo las condiciones básicas de duración y distancia.
- D. Para cada día, es necesario que la base tenga altura definida sobre el nivel medio del mar.

Una superficie puede considerarse como un conjunto de perfiles, cuyas bases y puntos finales deben ser NPs.

Los datos que permiten obtener la altura nivelada por medio de GPS (H_{GPS}) de los puntos nuevos son: Altura elipsoidal (h) y ondulación geoidal (N GEOCOL98) de todos los puntos utilizados y la altura nivelada (H) de los puntos NP.

METODOLOGÍA EN OFICINA

Una vez recopilada la información en campo y procesadas las coordenadas latitud (ϕ), longitud (λ) y altura elipsoidal (h) de cada estación rastreada, la determinación de alturas ortométricas mediante el Sistema GPS describe el siguiente procedimiento:

a. Determinación de las diferencias entre las alturas elipsoidales de la base (h_{Base}) y sus rover (h_{Ri}) correspondientes:

$$Dh_i = h_{Ri} - h_{Base} \quad (1)$$

b. Determinación de las diferencias de alturas geoidales entre la base (N_{Base}) y sus rover (N_{Ri}) correspondientes:

$$DN_i = N_{Ri} - N_{Base} \quad (2)$$

c. Determinación de las diferencias de alturas ortométricas GPS (ΔH_{GPSi}) entre la base y sus rover correspondientes:

$$DH_{GPSi} = Dh_i - DN_i \quad (3)$$

d. Cálculo de las alturas ortométricas GPS iniciales (H°_{GPSi}) de los puntos desconocidos:

$$H^{\circ}_{GPSi} = H_{Base} + DH_i \quad (4)$$

e. Determinación de las diferencias de alturas ortométricas GPS iniciales (H°_{GPSi}) entre estaciones consecutivas:

$$DH^{\circ}_{GPS} = DH_i - DH_{i-1} \quad (5)$$

éstas deben ser ajustadas a partir de los valores de altura nivelados en las bases.

f. Ajuste por mínimos cuadrados de ΔH°_{GPS} de acuerdo con el modelo matemático del método correlativo:

$$BV + W = 0 \quad (6)$$

Siendo:

$$V = P^{-1} B^T (BP^{-1} B^T)^{-1} W \quad (7)$$

$$W = C - BL^b \quad (8)$$

donde:

$B = b_{m,n}$: Matriz de los coeficientes de las observaciones en las ecuaciones de condición,
 $P = p_{n,n}$: Matriz de los pesos de las observaciones, $L = l_{m,1}$: Vector de las observaciones,
 $C = c_{m,1}$: Vector de los términos independientes en las ecuaciones de condición y
 $V = (v_i)_{(i=1,2,\dots,n)}$: Vector de las desviaciones de las cantidades observadas.

g. Determinación de las alturas ortométricas GPS definitivas:

$$H_{GPS-Final} = H_{Nivelada\ de\ la\ base} + DH_i\ Ajustado \quad (9)$$

En este proceso matemático se recomienda trabajar cuatro dígitos decimales, con el propósito de que los errores generados en el redondeo de las cifras se acumulen en el último.

EJEMPLOS

A continuación se presenta un ejemplo, del procesamiento de datos en oficina, por cada uno de los casos citados en la metodología de campo.

Caso 1. PUNTO : Determinación de la altura de un punto sobre el nivel medio del mar.

Se desea conocer la altura ortométrica GPS del punto geodésico TG13, localizado en Monserrate, a partir del vértice CODAZZI y los NPs 6E1, B9S1, 86CM14 y 90CM14. Las coordenadas geodésicas y la altura elipsoidal de éstos ya han sido calculadas y ajustadas.

Las diferentes alturas de cada punto se ilustran en la tabla 1.

Punto	Altura elipsoidal (h)	Altura GEOCOL98 (N)	Altura nivelada
Vértice CODAZZI	2610,8160 m	21,5668 m	2588,5523 m
NP 6E1	2697,2876 m	20,9002 m	2673,2700 m
NP B9S1	2580,7914 m	20,8347 m	2557,3867 m
NP 86CM14	2575,7611 m	20,9812 m	2552,5900 m
NP 90CM14	2577,5087 m	20,9799 m	2553,9538 m
Punto TG13	3217,8420 m	21,5469 m	A determinar

Tabla 1. Alturas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura ortométrica GPS de un punto (Caso 1).

a. Determinación de las diferencias entre las alturas elipsoidales del punto de cálculo y las estaciones de altura conocida: $Dh_i = h_{TG13} - h_{NPi}$ (Ver tabla 2)

b. Determinación de las diferencias de alturas geoidales entre el punto de cálculo y las estaciones de altura conocida: $DN_i = N_{TG13} - N_{NPi}$ (Ver tabla 2)

c. Determinación de las diferencias de alturas ortométricas GPS (ΔH_{GPSi}) entre el punto de cálculo y las estaciones de altura conocida: $DH_{GPSi} = Dh_i - DN_i$ (ver tabal 2)

Estaciones	$Dh_i = h_{TG13} - h_{NPi}$	$DN_i = N_{TG13} - N_{NPi}$	$DH_{GPSi} = Dh_i - DN_i$
TG13 - CODAZZI	607,0263 m	-0,0199 m	607,0462 m
TG13 - NP 90CM14	640,3333 m	0,5670 m	639,7663 m

TG13 - NP B9S1	637,0506 m	0,7122 m	636,3384 m
TG13 - NP 6E1	520,5544 m	0,6467 m	519,9077 m
TG13 - NP 86CM14	642,0809 m	0,5657 m	641,5152 m

Tabla 2. Alturas relativas elipsoidales, geoidales y niveladas de las estaciones consideradas en la determinación de la altura ortométrica GPS de un punto (Caso 1).

Una vez determinadas las alturas relativas entre el punto desconocido (TG13) y las estaciones con valor de altura, el problema se representa esquemáticamente (Figura 5) para facilitar el diseño del ajuste por mínimos cuadrados.

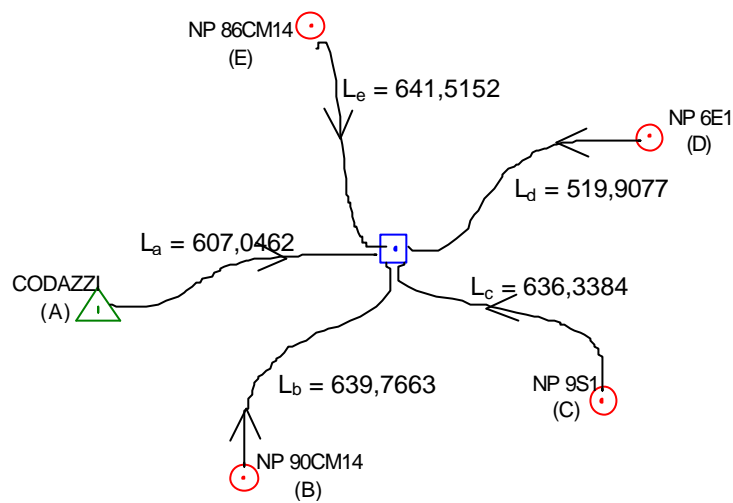


Figura 5. Representación esquemática de la determinación de la altura ortométrica GPS de un punto (Caso 1). El sentido de la flecha indica la altura mayor.

d. Ajuste por mínimos cuadrados de ΔH°_{GPS} de acuerdo con el modelo matemático del método correlativo:

Formulación de las ecuaciones de condición:

La cantidad de ecuaciones de condición que deben plantearse es igual al número de estaciones con altura conocida (5) menos el número de estaciones con altura desconocida (1), en este caso deben formularse cuatro (4) ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (l_a + v_a) - (l_c + v_c) &= H_{nivC} - H_{nivA} = -31,1656 \\
 (l_e + v_e) - (l_b + v_b) &= H_{nivB} - H_{nivE} = 1,3638 \\
 (l_a + v_a) - (l_d + v_d) &= H_{nivD} - H_{nivA} = 84,7177 \\
 (l_e + v_e) - (l_c + v_c) &= H_{nivC} - H_{nivE} = 4,7967
 \end{aligned}$$

Planteamiento de las matrices:

$B = b_{m,n}$: Matriz de los coeficientes de las observaciones en las ecuaciones de condición.

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$P = p_{n,n}$: Matriz de los pesos de las observaciones. En este caso se considera que las observaciones fueron realizadas bajo condiciones iguales, por lo tanto la matriz P es idéntica.

$C = c_{m,1}$: Vector de los términos independientes en las ecuaciones de condición.

$$C = \begin{vmatrix} -31,1656 \\ 1,3638 \\ 84,7177 \\ 4,7967 \end{vmatrix}$$

$L = l_{m,1}$: Vector de las observaciones.

$$L = \begin{vmatrix} 607,0462 \\ 639,7663 \\ 636,3384 \\ 519,9077 \\ 641,5152 \end{vmatrix}$$

Solución del problema:

Una vez planteadas la matrices se desarrollan las siguientes operaciones:

$$BV + W = 0$$

$$V = P^{-1} B^T (BP^{-1} B^T)^{-1} W$$

$$W = C - BL$$

Así, se obtienen las desviaciones (v_i) de las observaciones realizadas.

$$V = \begin{vmatrix} -1,53318 \\ 0,34522 \\ 0,34022 \\ 0,88762 \end{vmatrix}$$

$$| -0,03988 |$$

Las observaciones corregidas corresponden con: $L^* = L + V$:

$$L^* = \begin{vmatrix} 605,5130 \\ 640,1115 \\ 636,6786 \\ 520,7953 \\ 641,4753 \end{vmatrix}$$

g. Determinación de la altura ortométrica GPS definitiva:

La altura ortométrica GPS del punto TG13 será igual a la altura nivelada de cualquiera de los puntos considerados más su correspondiente diferencia ajustada:

$$H_{GPS\ TG13} = H_{niv\ CODAZZI} + L^*_A = 2588,5523 + 605,5130 = 3194,0653$$

$$H_{GPS\ TG13} = H_{niv\ 90CM14} + L^*_B = 2553,9538 + 640,1115 = 3194,0653$$

$$H_{GPS\ TG13} = H_{niv\ B9S1} + L^*_C = 2557,3867 + 636,6786 = 3194,0653$$

$$H_{GPS\ TG13} = H_{niv\ 6E1} + L^*_D = 2673,2700 + 520,7953 = 3194,0653$$

$$H_{GPS\ TG13} = H_{niv\ 86CM14} + L^*_E = 2552,5900 + 641,4753 = 3194,0653$$

Caso 2. PERFIL : Determinación de alturas para una serie de puntos dispuestos a lo largo de un perfil.

Se quiere determinar la altura ortométrica GPS de los puntos B70NW1, B72NW1, B75NW1, A76NW1, B78NW1 y B86NW1, a partir de las alturas niveladas de los NPs A68NW1 y B88NW1. Las coordenadas geodésicas y la altura elipsoidal de éstos ya han sido calculadas y ajustadas.

Las diferentes alturas de cada punto se ilustran en la tabla 3.

Punto	Altura elipsoidal (h)	Altura GEOCOL98 (N)	Altura nivelada
NP A68NW1 Base	1520,9080 m	23,1217 m	1502,2687 m
NP B70NW1	1424,8843 m	23,1191 m	A determinar
NP B72NW1	1171,8970 m	23,1193 m	A determinar
NP B75NW1	997,0633 m	23,1102 m	A determinar
NP A76NW1	1071,1215 m	23,1076 m	A determinar
NP B78NW1	1252,3064 m	23,1025 m	A determinar
NP B86NW1	805,4677 m	23,0916 m	A determinar
NP B88NW1	626,1350 m	22,8113 m	608,3497 m

Tabla 3. Alturas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura ortométrica GPS de los puntos contenidos en un perfil (Caso 2).

a. Determinación de las diferencias entre las alturas elipsoidales de la base (h_{Base}) y sus rover (h_{Ri}) correspondientes: $Dh_i = h_{Ri} - h_{Base}$ (Ver tabla 4)

b. Determinación de las diferencias de alturas geoidales entre la base (N_{Base}) y sus rover (N_{Ri}) correspondientes: $DN_i = N_{Ri} - N_{Base}$ (Ver tabla 4)

c. Determinación de las diferencias de alturas ortométricas GPS (ΔH_{GPSi}) entre la base y sus rover correspondientes: $DH_{GPSi} = Dh_i - DN_i$ (Ver tabla 4)

Estaciones	$Dh_i = h_{Ri} - h_{Base}$	$DN_i = N_{Ri} - N_{Base}$	$DH_{GPSi} = Dh_i - DN_i$
B70NW1 - A68NW1	-96,0237 m	-0,0260 m	-96,2110 m
B72NW1 - A68NW1	-349,1100 m	-0,0240 m	-349,0086 m
B75NW1 - A68NW1	-523,8447 m	-0,0024 m	-523,8423 m
A76NW1 - A68NW1	-449,7865 m	-0,0141 m	-449,7724 m
B78NW1 - A68NW1	-268,6016 m	-0,0192 m	-268,5824 m
B86NW1 - A68NW1	-715,4403 m	-0,0301 m	-715,4102 m
B88NW1 - A68NW1	-894,7730 m	-0,3104 m	-894,4626 m

Tabla 4. Alturas relativas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura ortométrica GPS de puntos contenidos en un perfil (Caso 2).

d. Cálculo de las alturas ortométricas GPS iniciales (H°_{GPSi}) de los puntos desconocidos: $H^{\circ}_{GPSi} = H_{Base} + \Delta H_i$ (Tabla 5).

e. Determinación de las diferencias de alturas ortométricas GPS iniciales (H°_{GPSi}) entre estaciones consecutivas: $DH^{\circ}_{GPS} = DH_i - DH_{i-1}$ (Tabla 5).

Punto	Altura ortométrica GPS inicial (H°_{GPSi})	$DH^{\circ}_{GPS} = DH_i - DH_{i-1}$
NP A68NW1 Base	1502,26867 m	
NP B70NW1	1406,05767 m	-96,2110
NP B72NW1	1153,26007 m	-252,7976
NP B75NW1	978,42637 m	-174,8337
NP A76NW1	1052,49627 m	74,0699
NP B78NW1	1233,68627 m	181,1900
NP B86NW1	786,85847 m	-446,8278
NP B88NW1	607,80607 m	-179,0524

Tabla 5. Alturas ortométricas con GPS y sus diferencias relativas (Caso 2)

Una vez determinadas las alturas relativas entre los diferentes puntos, el problema se representa esquemáticamente (Figura 6) para facilitar el diseño del ajuste por mínimos cuadrados.

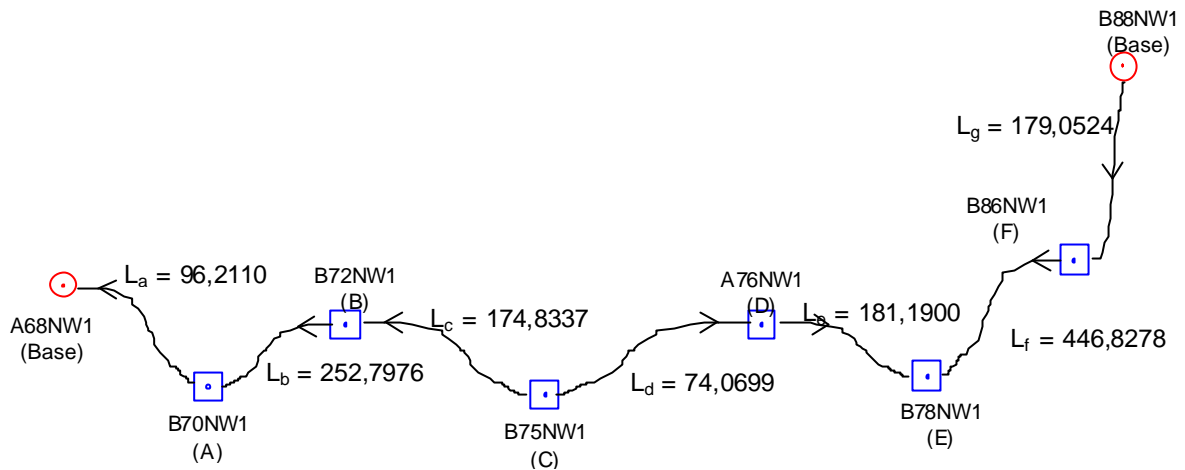


Figura 6. Representación esquemática de la determinación de la altura ortométrica GPS de puntos contenidos en un perfil (Caso 2). El sentido de la flecha indica la altura mayor.

d. Ajuste por mínimos cuadrados de ΔH°_{GPS} de acuerdo con el modelo matemático del método correlativo:

Ecuaciones de condición:

$$-(l_a + v_a) - (l_b + v_b) - (l_c + v_c) + (l_d + v_d) + (l_e + v_e) - (l_f + v_f) - (l_g + v_g) = H_{B88} - H_{A68} = -893,919$$

Planteamiento de las matrices:

$B = b_{m,n}$: Matriz de los coeficientes de las observaciones en las ecuaciones de condición.

$$B = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$P = p_{n,n}$: Matriz de los pesos de las observaciones. En este caso se considera que las observaciones fueron realizadas bajo condiciones iguales, por lo tanto la matriz P es idéntica.

$C = c_{m,1}$: Vector de los términos independientes en las ecuaciones de condición.

$$C = \begin{vmatrix} -893,919 \end{vmatrix}$$

$L = l_{m,1}$: Vector de las observaciones.

$$L = \begin{vmatrix} 96,2110 \\ 252,7976 \\ 174,8337 \\ 74,0699 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 181,1900 \\ 446,8278 \\ 179,0524 \end{vmatrix}$$

Solución del problema:

Una vez planteadas la matrices se desarrollan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} BV + W &= 0 \\ V &= P^{-1} B^T (BP^{-1} B^T)^{-1} W \\ W &= C - BL \end{aligned}$$

Así, se obtienen las desviaciones (v_i) de las observaciones realizadas.

$$V = \begin{vmatrix} -0,07755 \\ -0,07755 \\ -0,07755 \\ 0,07755 \\ 0,07755 \\ -0,07755 \\ -0,07755 \end{vmatrix}$$

Las observaciones corregidas corresponden con: $L^* = L + V$:

$$L^* = \begin{vmatrix} 96,1335 \\ 252,7200 \\ 174,7560 \\ 74,1475 \\ 181,2680 \\ 446,7500 \\ 178,9750 \end{vmatrix}$$

g. Determinación de las alturas ortométricas GPS definitivas:

$$H_{\text{GPS-Final}} = H_{\text{Nivelada de la base}} + \Delta H_i \text{ Ajustado}$$

Punto	ΔH_i Ajustado	$H_{\text{GPS-Final}}$
NP A68NW1 Base		1502,2687 m
NP B70NW1	-96,1335	1406,1352 m
NP B72NW1	-252,7200	1153,4152 m
NP B75NW1	-174,7560	978,6592 m
NP A76NW1	74,1475	1052,8067 m
NP B78NW1	181,2680	1234,0747 m
NP B86NW1	-446,7500	787,3247 m

NP B88NW1	-178,9750	608,3497 m
-----------	-----------	------------

Tabla 6. Alturas ortométricas GPS para los puntos contenidos en un perfil (Caso 2)